

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Rosemarie GEOFFRE

**SUR UN PROBLÈME NON LINÉAIRE
DE RÉSONATEURS A QUARTZ**



Soutenue le 31 mars 1980, devant la Commission d'Examen :

MM. J. ROBERT

Président

Ph. BENILAN
R. BESSON
P. LESAIN
F. MIGNOT



Examineurs

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Rosemarie GEOFFRE

**SUR UN PROBLÈME NON LINÉAIRE
DE RÉSONATEURS A QUARTZ**



Soutenue le 31 mars 1980, devant la Commission d'Examen :

MM. J. ROBERT

Président

Ph. BENILAN
R. BESSON
P. LESAIN
F. MIGNOT

} Examinateurs

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCIS-COMTE

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN METHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THEORIE DES NOMBRES

par

Rosemarie GEORGE



SUR UN PROBLEME NON LINEAIRE DE RESONATEURS A QUARTS



Soutenue le 27 mai 1981 devant le Comité de l'Université de Leiden

Président

M. J. ROBERT

Examinateurs

M. J. ROBERT
M. J. ROBERT
M. J. ROBERT
M. J. ROBERT
M. J. ROBERT

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

Président : Monsieur le Professeur Pierre LÉVÊQUE

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

ASSESSEURS

M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biol. animale Ecologie

DOYENS HONORAIRES

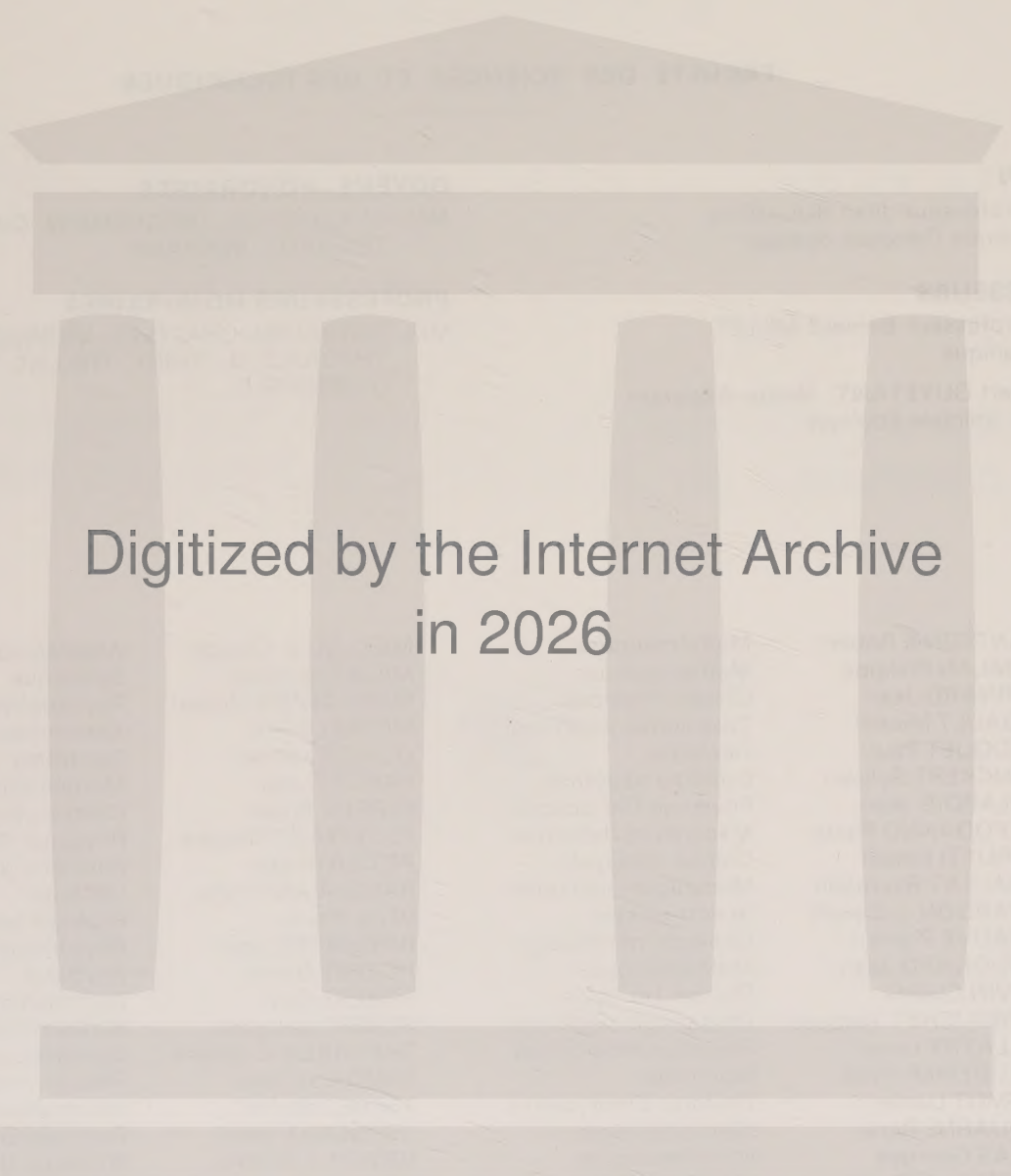
MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,
THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN
THEOBALD N., THIRY, TRILLAT, TRONCHET,
UEBERSFELD

MM. BANTEGNIE Robert	: Mathématiques	MIELLOU J. Claude	: Analyse numérique
BENILAN Philippe	: Mathématiques	MILLET Bernard	: Botanique
BERNARD Jean	: Chimie Physique	MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale	MOREELS Guy	: Astronomie
BROQUET Paul	: Géologie	OLIVIER Marcel	: Electroniq. quantique
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale	PARIZET Jean	: Mathématiques
BULABOIS Jean	: Physique Gle optique	PERROT Roger	: Chimie générale
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique	PLUVINAGE Philippe	: Physique théorique
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée	POTIER Robert	: Physique des sols
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée	RANGHEARD Yves	: Géologie
CHARDON J. Claude	: Spectroscopie	REAL Pierre	: Ecologie animale
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie	RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
COUGNARD Jean	: Mathématiques	ROBERT Daniel	: Physique
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle	ROBERT Guy	: Electrochimie
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale	ROBERT Jacques	: Mathématiques I
GALATRY Louis	: Physique moléculaire	THEOBALD J. Gérard	: Spectroscopie hertzienne
GAUDEMER Yves	: Biochimie	THIEBAUT Jean	: Pétrogr.minéralogie
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie	TREHEL Michel	: Informatique
GOUARNE René	: Mathématiques	VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
GRAS Georges	: Mathématiques	VIENOT J.Charles	: Physique Gle optique
GREMILLARD Jean	: Mathématiques	WEIL Michel	: Mathématiques
KARCHE J.Paul	: Pétrographie Minéralogie		
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée		
LAUDE Bernard	: Chimie organique		
LESAINTE Pierre	: Mathématiques I		
LHOTE François	: Automatique		
MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales		

Responsable des services administratifs :
M. Jean-Marie RUNGE



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0015

Je suis heureuse de pouvoir exprimer ici ma profonde et respectueuse reconnaissance à M. J. ROBERT pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail dès mon arrivée à Besançon, les précieuses indications et les encouragements qu'il m'a toujours prodigués depuis.

Je le remercie également de présider le Jury de cette thèse.

Qu'il me soit permis de remercier :

M. Ph. BENILAN, pour ses conseils judicieux et sa participation au Jury,

M. M. P. LESAIN et F. MIGNOT, d'avoir accepté de faire partie du Jury,

M. R. BESSON, pour l'ouverture qu'il a manifestée aux idées de M. J. ROBERT de collaboration entre physiciens et mathématiciens, et pour sa participation au Jury,

L'équipe d'Analyse Non Linéaire de Besançon pour sa sympathie à mon égard.

Je remercie aussi Melle C. PAGANI et M. R. VRANA grâce à qui cette publication a pu être réalisée.

Les mathématiques ne sont abstraites qu'au niveau des principes, car toute la nature, avec les montagnes, les rivières, les arbres, les cristaux, les métaux, les animaux, les êtres humains... ne sont que des jeux et des rapports de nombres qui ont pris chair et os. Quand on travaille sur les mathématiques, on travaille sur de purs principes, de pures forces qu'il faut apprendre à interpréter.

Quand les mathématiciens auront la connaissance de la Science Initiatique, ils découvriront que tout ce qui existe dans la nature, les forces, les éléments, les quintessences, peut être réduit à des symboles représentés par des nombres. Quand ils sauront interpréter, déchiffrer ces symboles, ces nombres, ils verront que toute la création est basée sur les mathématiques.

Oui, les mathématiques sont des forces vivantes, alors que pour les humains elles ne sont que des abstractions sans aucun rapport avec tout ce qui se passe dans la vie.

Prenons seulement un exemple parmi des milliers : les différentes périodes de la vie d'un être humain : là nous trouverons les quatre opérations. Tout d'abord quand il est un enfant, il ne travaille qu'avec l'addition, il ramasse tout, il touche à tout, il met tout à sa bouche. Quand il devient un adolescent, il commence à s'occuper de la soustraction : il rejette beaucoup de choses qu'il avait additionnées pendant son enfance... jusqu'à même rejeter parfois ses parents et le Seigneur... Plus tard, à l'âge adulte, il manifeste une nette préférence pour la multiplication : il multiplie ses enfants, ses magasins, ses succursales, ses biens... et même quelquefois ses maîtresses. Et enfin, avant de quitter la terre, il se met à diviser : il distribue tel bien à sa fille, tel autre à son fils... Il ne garde rien pour lui, jusqu'à la division absolue, la mort !

Tant que les mathématiciens considèrent les nombres, les chiffres comme morts, ils ne comprendront pas la profondeur et la science des nombres. Toute la nature, toute la vie est basée sur ces nombres.

Un jour tout sera vivifié et expliqué. Si on connaissait seulement le sens des nombres 1, 2, 3, 4, on comprendrait beaucoup de vérités extraordinaires que Pythagore, qui travaillait avec ces quatre nombres, connaissait.

Le mathématicien qui saurait à quoi correspondent ses différentes opérations et les résultats de ses calculs, y découvrirait l'essence et le mécanisme de tous les processus physiques, psychiques et cosmiques.

OMRAAM MIKHAEL AIVANHOV

INTRODUCTION

=====

L'étude des résonateurs à quartz, qui fait l'objet des recherches du Laboratoire de Chronométrie et Piézoélectricité de l'Université de Franche-Comté, montre que pour une excitation appropriée d'un disque de quartz (par un courant électrique), on obtient des vibrations de cisaillement d'épaisseur à l'intérieur du disque. L'étude du phénomène (cf. thèse de Gagnepain [7]), montre que la vibration de cisaillement est une fonction $u(t, x)$, du temps t et d'une variable d'espace x , satisfaisant :

$$P(\gamma, b) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} - \gamma (u_x^3)_x = 0, \\ -a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) - \gamma u_x^3(t, 0) = b u(t, 0) + \varphi(t), \\ +a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) + \gamma u_x^3(t, 1) = b u(t, 1) + \varphi(t), \\ u(0, x) = u_0(x) \quad , \quad u_t(0, x) = u_1(x), \end{array} \right.$$

où $(t, x) \in [0, T] \times [0, 1]$ (avec $T > 0$),

et où $\varphi(t)$ est une fonction donnée, a, c, γ, b sont des constantes données, avec a et c strictement positives, c étant très petit devant a , et avec γ et b des constantes dont le signe est quelconque, γ étant très petit devant a . (Le terme $-c u_{xxt}$ correspond physiquement à un terme d'amortissement).

Différents auteurs (Greenberg [8], [9], Mac-Camy et Mizel [9], Dafermos [4]) ont étudié des équations aux dérivées partielles du type :

$$u_{tt} - \left(\sigma(u_x) \right)_x - c u_{xxt} = 0$$

avec :

1) une fonction σ dérivable, dont la dérivée est soit strictement positive (cas monotone), soit bornée ;

2) des conditions aux bords de type Dirichlet ou de type Neumann homogène.

Leurs résultats ne sont pas applicables au problème $P(\gamma, b)$ considéré ici, parce que :

1) la dérivée de l'application σ définie par $\sigma(p) = ap + \gamma p^3$ n'est ni positive, ni bornée, lorsque γ est strictement négatif ;

2) les conditions aux bords ne sont ni de type Dirichlet, ni de type Neumann, mais d'un type "mêlé".

L'objet de ce travail est l'étude de théorème d'existence de solution de ce problème $P(\gamma, b)$ dans des espaces fonctionnels convenables assurant de "bonnes" régularités.

Une méthode de monotonie ne permettant pas d'atteindre le cas où γ est négatif, on considère le problème $P(\gamma, b)$ comme une perturbation non linéaire du problème linéaire $P(0, b)$. On obtient alors l'existence de solution par application du théorème de point fixe de Kakutani dans un espace fonctionnel convenable garantissant des régularités suffisantes.

Pour cela, il faut d'abord étudier l'existence et l'unicité de solutions du problème $P(0, b)$. Pour tourner la difficulté des conditions aux bords de type mêlé, l'idée est d'utiliser une méthode de point fixe à partir du problème (L_g) avec conditions aux bords de type Neumann non homogènes :

$$(L_g) \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} = f \quad , \\ -a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) = g_0(t) , \\ +a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) = g_1(t) , \\ u(0, x) = u_0(x) \quad , \quad u_t(0, x) = u_1(x) . \end{array} \right.$$

En effet, grâce à la linéarité, on peut alors appliquer le théorème de l'alternative de Fredholm, si on connaît beaucoup de régularités pour les solutions du problème (L_g) .

On remarque enfin que ce problème (L_g) est facile à étudier (grâce à un changement de fonction) si on dispose de théorèmes d'existence et d'unicité de solutions très régulières pour le problème :

$$(\ell_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} = F \quad , \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0 \quad , \\ u(0, x) = u_0(x) \quad , \quad u_t(0, x) = u_1(x) . \end{array} \right.$$

Ces théorèmes sont obtenus à partir des solutions du problème classique de la chaleur par une "méthode de continuité" inspirée par celle qu'utilise Dafermos [4] et après avoir établi un nombre suffisant de majorations a priori.

Le résultat essentiel obtenu est le théorème :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs.

Il existe une suite $\mathcal{P} = \{b_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de nombres réels telle que, si $b \notin \mathcal{P}$, si $u_0 \in H^2(0, 1)$, $u_1 \in H^1(0, 1)$, $\varphi \in H^1(0, T)$, alors il existe $\gamma_b > 0$ tel que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$|\gamma| \leq \gamma_b$$

il existe $u \in L^\infty(0, T ; L^2(0, 1))$, avec :

$$u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx} \in L^\infty(0, T ; L^2(0, 1)), u_{tt}, u_{xxt} \in L^2(0, T ; L^2(0, 1)),$$

et vérifiant :

$$(i) \quad \text{pour presque tout } x \in (0, 1) : u(0, x) = u_0(x)$$

et

$$u_t(0, x) = u_1(x) ;$$

$$(ii) \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T) :$$

$$-a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) - \gamma u_x^3(t, 0) = b u(t, 0) + \varphi(t) ,$$

$$+a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) + \gamma u_x^3(t, 1) = b u(t, 1) + \varphi(t) ;$$

(iii) au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} - \gamma (u_x^3)_x = 0.$$

Le plan de ce travail est le suivant :

En préliminaires, on donne quelques indications sur les espaces de fonctions utilisés et la notion classique de solution "variationnelle" d'un problème aux dérivées partielles.

Le chapitre I est consacré à l'étude du problème (ℓ_0) . Cette étude donne lieu à deux types de résultats : l'un sous des hypothèses de régularité sur F , U_0 et U_1 assez larges et l'autre sous des hypothèses de régularité plus fortes sur F et sous les hypothèses $U_0 = 0$, $U_1 = 0$.

Dans le chapitre II, on étudie le problème (L_g) et on obtient à nouveau deux types de résultats.

Dans le chapitre III, on établit un théorème d'existence et d'unicité pour le problème $P(0, b)$ par application du théorème de l'alternative de Fredholm, puis le théorème d'existence final pour le problème $P(\gamma, b)$ par application du théorème de Kakutani.

Ce travail théorique est la première étape de la résolution du problème proposé par les physiciens, la seconde devant être une étude numérique exploitant les régularités obtenues et les estimations établies.

PRELIMINAIRES

=====

A) Espaces utilisés

1) Soit $\Omega =]0, 1[$. On rappelle que $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables sur Ω et de carré intégrable, et que c'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} v(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On appelle espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ les ensembles :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) ; v_x \in L^2(\Omega)\},$$

$$H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) ; v_x, v_{xx} \in L^2(\Omega)\},$$

où v_x et v_{xx} sont les dérivées première et seconde de v dans l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω . Ce sont des espaces de Banach pour les normes respectives :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Dire qu'une fonction v_x de $L^2(\Omega)$ est dérivée dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $v \in L^2(\Omega)$ signifie que pour toute fonction φ indéfiniment dérivable sur Ω et à support compact, on a :

$$\int_{\Omega} v_x(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \varphi_x(x) dx.)$$

On démontre que tout élément de $H^1(\Omega)$ possède un représentant appartenant à l'espace $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ des fonctions continues sur $\bar{\Omega} = [0, 1]$.

(ce résultat tombe en défaut si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$) ; cela définit une injection de $H^1(\Omega)$ dans $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et on utilisera fréquemment la continuité de cette injection.

Par ailleurs, l'injection naturelle de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. (Ce résultat est vrai pour tout ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$).

2) Soit $T > 0$, $\Omega =]0, 1[$ et X un espace de Banach. On note $L^2(0, T; X)$ (resp. $L^\infty(0, T; X)$) l'ensemble des applications mesurables de $]0, T[$ à valeurs dans X dont le carré de la norme dans X est intégrable (resp. la borne supérieure essentielle de la norme dans X est finie). C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|v\|_{L^2(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\text{resp. } \|v\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess } \|v(t)\|_X \right).$$

Si v appartient à $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, on peut définir une fonction $\tilde{v} :]0, T[\times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour presque tout (t, x) de $]0, T[\times \Omega$:

$$\tilde{v}(t, x) = v(t)(x).$$

On démontre alors :

$$v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \Leftrightarrow \tilde{v} \in L^2(]0, T[\times \Omega).$$

De plus, si $\frac{dv}{dt}$ désigne la dérivée première de v dans l'espace $\mathcal{D}'(]0, T[; L^2(\Omega))$ (pour toute fonction φ indéfiniment dérivable sur $]0, T[$ et à support compact, on a :

$$\int_0^T \varphi(t) \frac{dv}{dt}(t) dt = - \int_0^T \varphi_t(t) v(t) dt)$$

et si $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$ désigne la dérivée de v par rapport à t dans l'espace $\mathcal{D}'(]0, T[\times \Omega)$, on a :

$$\frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \in L^2(]0, T[\times \Omega)$$

et

$$\frac{dv}{dt}(t)(x) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(t, x).$$

Dans ce qui suit on ne distinguera donc pas les notations : v désignera aussi bien la fonction de $]0, T[$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ que la fonction de $]0, T[\times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; v_t désignera aussi bien $\frac{dv}{dt}$ que $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$.

Le lecteur non spécialiste retrouvera les définitions et les résultats classiques concernant les espaces utilisés dans [1] ou [12].

B) Solution "variationnelle"

Le mathématicien utilise souvent la notion de "solution variationnelle" d'un problème aux dérivées partielles, qui apparaît formellement ici de la façon suivante :

Si on multiplie, formellement, l'équation vérifiée par u par une fonction v , on obtient, après intégration sur $(0, T) \times (0, 1)$:

$$\int_0^T \int_0^1 u_{tt} v \, dx \, dt - \int_0^T \int_0^1 \left(a u_{xx} + c u_{xxt} + \gamma \left(u_x^3 \right)_x \right) v \, dx \, dt = 0.$$

En utilisant la formule de Green formelle, on obtient, compte tenu de la condition aux bords vérifiée par u :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 u_{tt} v \, dx \, dt + \int_0^T \int_0^1 \left(a u_x + c u_{xt} + \gamma u_x^3 \right) v_x \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \left[\left(b u(t, 1) + \phi(t) \right) v(t, 1) + \left(b u(t, 0) + \phi(t) \right) v(t, 0) \right] dt. \end{aligned}$$

On appelle alors solution variationnelle de $P(\gamma, b)$ tout $u \in L^2(Q)$ avec $u_x \in L^2(Q)$, $u_x^3 \in L^2(Q)$, $u_{xt} \in L^2(Q)$, $u_{tt} \in L^2(Q)$ ($Q =]0, T[\times]0, 1[$), vérifiant :

1) $u(0, x) = u_0(x)$, $u_t(0, x) = u_1(x)$ pour presque tout x dans $(0, 1)$,

2) pour tout v dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 u_{tt} v \, dx \, dt + \int_0^T \int_0^1 \left(a u_x + c u_{xt} + \gamma u_x^3 \right) v_x \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \left[\left(b u(t, 1) + \phi(t) \right) v(t, 1) + \left(b u(t, 0) + \phi(t) \right) v(t, 0) \right] dt. \end{aligned}$$

Inversement, si u est une solution variationnelle de $P(\gamma, b)$ et si de plus $u \in L^2(0, T; H^2(0, 1))$, $u_t \in L^2(0, T; H^2(0, 1))$, alors on démontre que u est solution du problème $P(\gamma, b)$ au sens presque partout, c'est-à-dire :

$$P(\gamma, b) \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ pour presque tout } x \text{ dans } (0, 1) : u(0, x) = u_0(x) \\ \quad \text{et} \\ \quad \quad u_t(0, x) = u_1(x); \\ \cdot \text{ pour presque tout } t \text{ dans } (0, T) : \\ \quad - a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) - \gamma u_x^3(t, 0) = b u(t, 0) + \phi(t), \\ \quad + a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) + \gamma u_x^3(t, 1) = b u(t, 1) + \phi(t); \\ \cdot \text{ pour presque tout } (t, x) \text{ dans } (0, T) \times (0, 1) : \\ \quad u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} - \gamma \left(u_x^3 \right)_x = 0. \end{array} \right.$$

- CHAPITRE I -

ETUDE DU PROBLEME (ℓ_o)
=====

A) Un premier théorème d'existence et d'unicité pour le problème (ℓ_o)

THEOREME 1 :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs,
 $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $U_0 \in W = \{w \in H^2(0, 1); w_x(0) = w_x(1) = 0\}$
et U_1 dans $H^1(0, 1)$.

Il existe un unique U appartenant à $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ avec
 $U_t, U_x, U_{xt}, U_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$,

$U_{tt}, U_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, et vérifiant :

(1) (i) pour presque tout $x \in (0, 1)$: $U(0, x) = U_0(x)$
et $U_t(0, x) = U_1(x)$;

(2) (ii) pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$U_x(t, 0) = 0,$$

$$U_x(t, 1) = 0 ;$$

(iii) au sens des distributions de $\mathcal{D}'(]0, T[\times]0, 1[)$ et pour
presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

(3)
$$U_{tt} - aU_{xx} - cU_{xxt} = F.$$

On démontre ce théorème en plusieurs étapes :

1) On établit des estimations a priori pour U solution du problème,
 U possédant les régularités indiquées dans le théorème, et F , U_0 , U_1

appartenant aux espaces précisés ci-dessus.

2) Ces estimations permettent de démontrer l'unicité d'une telle solution (a, c, T, F, U_0 et U_1 étant fixés).

3) On démontre l'existence par la "méthode de continuité" (cf. [4]). Cette méthode est basée essentiellement sur l'étude classique de l'équation de la chaleur avec condition de Neumann au bord.

Dans ce qui suit on note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions $U \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ telles que :

$$U_t, U_x, U_{xt}, U_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$U_{tt}, U_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

Cet espace, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ définie par

$$\|U\|_{\mathcal{E}}^2 = \|U\|^2 + \|U_t\|^2 + \|U_x\|^2 + \|U_{xt}\|^2 + \|U_{xx}\|^2 + \|U_{tt}\|^2 + \|U_{xxt}\|^2$$

(les 5 premières normes étant prises dans $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, et les deux dernières dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$) est un espace de Banach.

A.1. Estimations a priori :

Soient c, T deux nombres réels strictement positifs et a un réel. Soient $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $U_0 \in W$ et $U_1 \in H^1(0, 1)$.

Soit U solution de (i) (ii) (iii), appartenant à $\mathcal{E}$.

A.1.1. On multiplie (3) par U_t et on intègre pour $0 \leq t \leq s$ ($s \in [0, T]$) et $0 \leq x \leq 1$. Ceci a un sens puisque

$$U_{tt}, U_{xx}, U_{xxt}, F, U_t \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} (4) \quad \int_0^s \int_0^1 U_{tt} U_t \, dx \, dt - c \int_0^s \int_0^1 U_{xxt} U_t \, dx \, dt \\ = \int_0^s \int_0^1 a U_{xx} U_t \, dx \, dt + \int_0^s \int_0^1 F U_t \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Or, en utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \int_0^S \int_0^1 U_{tt} U_t \, dx \, dt &= \int_0^1 dx \left(\int_0^S \frac{1}{2} \frac{d}{dt} U_t^2(t, x) \, dt \right) \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} U_t^2(S, x) - \frac{1}{2} U_t^2(0, x) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \|U_t(S)\|_{L^2(0,1)}^2 - \frac{1}{2} \|U_1\|_{L^2(0,1)}^2
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 -c \int_0^S \int_0^1 U_{xxt} U_t \, dx \, dt &= -c \int_0^S \left(U_{xt}(t, 1) U_t(t, 1) - U_{xt}(t, 0) U_t(t, 0) \right) dt \\
 &\quad + c \int_0^S \int_0^1 U_{xt}^2 \, dx \, dt = c \int_0^S \int_0^1 U_{xt}^2 \, dx \, dt,
 \end{aligned}$$

car U satisfait (ii) et donc : $U_{xt}(t, 1) = U_{xt}(t, 0) = 0$ pour presque tout $t \in (0, T)$.

(4) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 (5) \quad &\|U_t(S)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2c \int_0^S \int_0^1 U_{xt}^2 \, dx \, dt \\
 &= \|U_1\|_{L^2(0,1)}^2 + 2a \int_0^S \int_0^1 U_{xx} U_t \, dx \, dt + 2 \int_0^S \int_0^1 F U_t \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

Le premier membre est une somme de deux termes positifs ou nuls.

Le second membre peut être majoré de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 |2a \int_0^S \int_0^1 U_{xx} U_t \, dx \, dt| &\leq \int_0^S \int_0^1 2|a U_{xx}| |U_t| \, dx \, dt \\
 &\leq a^2 \int_0^S \int_0^1 U_{xx}^2 \, dx \, dt + \int_0^S \int_0^1 U_t^2 \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 |2 \int_0^S \int_0^1 F U_t \, dx \, dt| &\leq \int_0^S \int_0^1 F^2 \, dx \, dt + \int_0^S \int_0^1 U_t^2 \, dx \, dt \\
 &\leq \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + \int_0^S \int_0^1 U_t^2 \, dx \, dt.
 \end{aligned}$$

On déduit donc de (5) l'inégalité :

(6)

$$\begin{aligned}
 &\|U_t(S)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2c \int_0^S \int_0^1 U_{xt}^2 \, dx \, dt \leq \|U_1\|_{L^2(0,1)}^2 \\
 &\quad + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + a^2 \int_0^S \int_0^1 U_{xx}^2 \, dx \, dt + 2 \int_0^S \int_0^1 U_t^2 \, dx \, dt
 \end{aligned}$$

Cette inégalité est vérifiée pour presque tout $s \in [0, T]$.

A. 1.2. On multiplie (3) par U_{tt} et on intègre pour $0 \leq t \leq s$ ($s \in [0, T]$)

et $0 \leq x \leq 1$. Ceci a un sens puisque :

$$U_{tt}, U_{xx}, U_{xxt}, F \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

On obtient :

$$(7) \quad \begin{aligned} \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt - c \int_0^s \int_0^1 U_{xxt} U_{tt} dx dt \\ = \int_0^s \int_0^1 a U_{xx} U_{tt} dx dt + \int_0^s \int_0^1 F U_{tt} dx dt \end{aligned}$$

et on remarque qu'on peut écrire, grâce à (2) :

$$\begin{aligned} -c \int_0^s \int_0^1 U_{xxt} U_{tt} dx dt &= -c \int_0^s (U_{xt}(t, 1)U_{tt}(t, 1) - U_{xt}(t, 0)U_{tt}(t, 0)) dt \\ &+ c \int_0^s \int_0^1 U_{xt} U_{xtt} dx dt = \frac{c}{2} \int_0^s \frac{d}{dt} \left(\int_0^1 U_{xt}^2 dx \right) dt \\ &= \frac{c}{2} \|U_{xt}(s)\|_{L^2(0, 1)}^2 - \frac{c}{2} \|U_{xt}(0)\|_{L^2(0, 1)}^2 \\ &= \frac{c}{2} \|U_{xt}(s)\|_{L^2(0, 1)}^2 - \frac{c}{2} \|U_{1,x}\|_{L^2(0, 1)}^2, \end{aligned}$$

d'après (1).

Ce dernier calcul est formel mais peut être justifié par passage à la limite.

(7) s'écrit donc :

$$(8) \quad \begin{aligned} 2 \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt + c \|U_{xt}(s)\|_{L^2(0, 1)}^2 \\ = c \|U_{1,x}\|_{L^2(0, 1)}^2 + \int_0^s \int_0^1 2 a U_{xx} U_{tt} dx dt + 2 \int_0^s \int_0^1 F U_{tt} dx dt. \end{aligned}$$

Le premier membre de (8) est positif ou nul et le second membre peut être majoré grâce aux inégalités :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^s \int_0^1 2 a U_{xx} U_{tt} dx dt \right| &\leq \int_0^s \int_0^1 2 |a| \epsilon U_{xx} \left| \frac{U_{tt}}{\epsilon} \right| dx dt \\ &\leq a^2 \epsilon^2 \int_0^s \int_0^1 U_{xx}^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \int_0^s \int_0^1 2 F U_{tt} dx dt \right| &\leq \epsilon^2 \int_0^s \int_0^1 F^2 dx dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt \\ &\leq \epsilon^2 \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt \end{aligned}$$

où ϵ est un réel strictement positif quelconque.

On déduit donc de (8) l'inégalité :

(9)

$$\begin{aligned} 2 \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt + c \|U_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq c \|U_{1,x}\|_{L^2(0,1)}^2 + \\ \epsilon^2 \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + a^2 \epsilon^2 \int_0^s \int_0^1 U_{xx}^2 dx dt &+ \frac{2}{\epsilon} \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt \end{aligned}$$

Et cette inégalité est vérifiée pour presque tout $s \in [0, T]$.

A. 1. 3. On multiplie (3) par U_{xx} et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$. Ceci a un sens puisque

$U_{tt}, U_{xx}, U_{xxt}, F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$. On obtient :

(10)

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_0^1 U_{tt} U_{xx} dx dt - c \int_0^s \int_0^1 U_{xxt} U_{xx} dx dt \\ = \int_0^s \int_0^1 a U_{xx}^2 dx dt + \int_0^s \int_0^1 F U_{xx} dx dt. \end{aligned}$$

On remarque que, grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} -c \int_0^s \int_0^1 U_{xxt} U_{xx} dx dt &= -\frac{c}{2} \int_0^1 dx \int_0^s \frac{d}{dt} (U_{xx}^2) dt \\ &= -\frac{c}{2} \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{c}{2} \|U_{xx}(0)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &= -\frac{c}{2} \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{c}{2} \|U_{0,xx}\|_{L^2(0,1)}^2, \end{aligned}$$

d'après (1).

Ainsi (10) s'écrit :

$$\begin{aligned} c \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 &= c \|U_{0,xx}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 \int_0^s \int_0^1 U_{tt} U_{xx} dx dt \\ &\quad - 2 \int_0^s \int_0^1 a U_{xx}^2 dx dt - 2 \int_0^s \int_0^1 F U_{xx} dx dt \end{aligned}$$

et cela permet d'obtenir l'inégalité suivante (vraie pour presque tout)
 $s \in [0, T]$) :

$$(11) \quad \begin{aligned} c \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq c \|U_{0,xx}\|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt \\ &\quad + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + 2(|a|+1) \int_0^s \int_0^1 U_{xx}^2 dx dt \end{aligned}$$

A.1.4. Conclusion :

On somme membre à membre les inégalités (6) (9) et (11) et on obtient :

$$\begin{aligned} &\|U_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2c \int_0^s \int_0^1 U_{xt}^2 dx dt + 2 \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt \\ &\quad + c \|U_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq \|U_1\|_{L^2(0,1)}^2 + c \|U_{1,x}\|_{L^2(0,1)}^2 + c \|U_{0,xx}\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\quad + (2+\epsilon^2) \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + 2 \int_0^s \int_0^1 U_t^2 dx dt \\ &\quad + \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right) \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt + (a^2 + a^2 \epsilon^2 + 2(|a|+1)) \int_0^s \int_0^1 U_{xx}^2 dx dt. \end{aligned}$$

On choisit à présent $\epsilon = 2$. Ainsi $\frac{2}{\epsilon} = \frac{1}{2}$.

On pose $c' = \sup(1, c, 2+\epsilon^2)$ et $A = a^2 + a^2 \epsilon^2 + 2(|a|+1)$.

L'inégalité précédente s'écrit alors :

$$(12) \quad \begin{aligned} &\|U_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt + c \|U_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\quad + c \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq c' \left(\|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right) \\ &\quad + 2 \int_0^s \int_0^1 U_t^2 dx dt + A \int_0^s \int_0^1 U_{xx}^2 dx dt \end{aligned}$$

De (12), on déduit : pour presque tout $s \in [0, T]$:

$$(13) \quad \frac{c'' \left(\|U_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \right)}{\leq K_1 + A \int_0^s \left(\|U_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|U_{xx}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \right) dt}$$

où on a posé :

$$c'' = \inf (1, c),$$

$$K_1 = c' \left(\|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right).$$

Et il résulte alors du lemme de Gronwall [2] que l'on a :

pour presque tout $s \in [0, T]$:

$$(14) \quad \frac{\|U_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|U_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2}{\leq \frac{K_1}{c''} e^{\frac{As}{c''}} \leq \frac{K_1}{c''} e^{\frac{AT}{c''}}}.$$

On peut alors majorer le second membre de (12) à l'aide de (14) par

$$K_1 + A \int_0^s \frac{K_1}{c''} e^{\frac{At}{c''}} dt = K_1 e^{\frac{As}{c''}} \leq K_1 e^{\frac{AT}{c''}}$$

d'où :

$$(15) \quad \frac{\frac{1}{2} \int_0^s \int_0^1 U_{tt}^2 dx dt + c \|U_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2}{\leq K_1 e^{\frac{As}{c''}}}.$$

On établit deux dernières estimations, concernant $\|U(s)\|_{L^2(0,1)}^2$ et $\|U_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2$:

pour presque tout $s \in [0, T]$, on a :

$$U(s) = U(0) + \int_0^s U_t(t) dt, \text{ d'après (1)}$$

d'où :

$$|U(s, x)| \leq |U_0(x)| + \int_0^s |U_t(t, x)| dt.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |U(s, x)|^2 &\leq 2 |U_0(x)|^2 + 2 \underbrace{\left(\int_0^s |U_t(t, x)| dt \right)^2}_{\leq [s^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s |U_t(t, x)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}]^2} \\ &\leq [s^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^s |U_t(t, x)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}]^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$|U(s, x)|^2 \leq 2 |U_0(x)|^2 + 2 \int_0^s |U_t(t, x)|^2 dt.$$

En intégrant sur $(0, 1)$, il vient, grâce au théorème de Fubini :

$$(16) \quad \|U(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 \|U_0\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 \int_0^s \|U_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt.$$

On a de même :

$$(17) \quad \|U_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 \|U_{0,x}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 \int_0^s \|U_{xt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt.$$

(14) et (16) donnent :

$$(18) \quad \underline{\|U(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 \|U_0\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 T K_1 \left(e^{\frac{A}{c''} T} - 1 \right), \text{ donc :}} \\ \underline{\|U(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq K_1 + 2 T K_1 \left(e^{\frac{A}{c''} T} - 1 \right).}$$

(15) et (17) donnent :

$$\|U_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 \|U_{0,x}\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 T \frac{K_1}{c} \int_0^s e^{\frac{A}{c''} t} dt \\ \leq K_1 + 2 T \frac{K_1}{c} \frac{c''}{A} \left(e^{\frac{A}{c''} T} - 1 \right), \text{ avec } A \geq 2 \\ \text{et } 0 < \frac{c''}{c} \leq 1$$

donc :

$$(19) \quad \underline{\|U_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq K_1 + T K_1 \left(e^{\frac{A}{c''} T} - 1 \right).}$$

Les estimations (14) (15) (18) et (19) peuvent se résumer dans le lemme suivant :

LEMME :

[Soit U une solution de (1) (2) (3), correspondant aux données $c > 0$, $T > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $U_0 \in W$ et $U_1 \in H^1(0, 1)$.

Si U appartient à $\mathcal{E}$, alors U vérifie :

$$(20) \quad \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{a,c,T} \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right)$$

où $B_{a,c,T}$ est une constante strictement positive, qui dépend des données a, c, T .

En effet, sous les hypothèses du lemme, les estimations (14) (15) (18) et (19) montrent qu'on a :

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq & [K_1 + 2 T K_1 (e^{\frac{A}{c''} T} - 1)] + [\frac{K_1}{c''} e^{\frac{AT}{c''}}] + [K_1 + T K_1 (e^{\frac{A}{c''} T} - 1)] \\ & + \frac{K_1}{\inf(\frac{1}{2}, c)} e^{\frac{A}{c''} T} + \|U_{xxt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2. \end{aligned}$$

Et de plus, d'après (3), on a :

$$\begin{aligned} c^2 \|U_{xxt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 & \leq 3 \left(\|F\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right. \\ & \quad \left. + a^2 \|U_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 + \|U_{tt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right) \\ & \leq K_1 + 3 a^2 T \frac{K_1}{c''} e^{\frac{AT}{c''}} + 6 K_1 e^{\frac{AT}{c''}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{a,c,T} \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right)$$

avec

$$(21) \quad B_{a,c,T} = c' \left[3 + 3 T \left(e^{\frac{A}{c''} T} - 1 \right) + e^{\frac{A}{c''} T} \left(\frac{1}{c''} + \frac{1}{\inf(\frac{1}{2}, c)} + \frac{3 a^2 T}{c''} + 6 \right) \right],$$

$$A = a^2 + a^2 \epsilon^2 + 2 (|a| + 1), \quad c' = \sup (1, c, 2 + \epsilon^2), \quad c'' = \inf (1, c).$$

ceci achève de démontrer le lemme.

A.2. Unicité de la solution U :

On fixe $c > 0$, $T > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $U_0 \in W$, $U_1 \in H^1(0, 1)$. Si U_1 et U_2 sont deux solutions de (1) (2) (3) appartenant à $\mathcal{E}$, alors $U = U_1 - U_2 \in \mathcal{E}$ et U vérifie :

- . pour presque tout $x \in (0, 1)$ $U(0, x) = 0$, $U_t(0, x) = 0$;
- . pour presque tout $t \in (0, T)$ $U_x(t, 0) = U_x(t, 1) = 0$;
- . au sens des distributions de $\mathcal{D}'(]0, T[\times]0, 1[)$ et pp (t, x)

$$U_{tt} - aU_{xx} - cU_{xxt} = 0.$$

Le lemme appliqué à U montre alors :

$$\|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{a, c, T} \times 0$$

donc : $\|U\|_{\mathcal{E}}^2 = 0$, donc $U = 0$ pour presque tout (t, x) appartenant à $(0, T) \times (0, 1)$.

Ainsi : $U_1 = U_2$ (pour presque tout (t, x))

et la solution du problème est unique.

A.3. Existence de la solution U :

On fixe $c > 0$, $T > 0$ et $a \in \mathbb{R}^*$, ainsi que $U_0 \in W$ et $U_1 \in H^1(0, 1)$.

Pour λ réel quelconque, on définit un opérateur L_λ sur $\mathcal{E}$ par :

$$L_\lambda U = U_{tt} - c U_{xxt} - \lambda a U_{xx}, \quad U \in \mathcal{E}.$$

On désigne par S l'ensemble des réels λ pour lesquels, quel que soit $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, le problème

$$\begin{array}{l} (3)_{\lambda, F} \\ (2) \\ (1) \end{array} \quad (\mathcal{L}_\lambda, F) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_\lambda U = F \\ U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) = 0 \\ U(0, x) = U_0(x), \quad U_t(0, x) = U_1(x) \end{array} \right.$$

possède une solution dans $\mathcal{E}$. (On appelle "solution dans $\mathcal{E}$ du problème $(\mathcal{L}_\lambda, F)$ " toute fonction $U \in \mathcal{E}$ vérifiant (1) pour presque tout $x \in (0, 1)$, (2) pour presque tout $t \in (0, T)$, et $(3)_{\lambda, F}$ au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pp (t, x)).

Démontrer l'existence de la solution U du théorème, c'est démontrer que : $1 \in S$.

Pour cela on démontre que

- S est non vide, car $0 \in S$;
- S est ouvert dans $\mathbb{R}$;
- S est fermé dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\mathbb{R}$ étant connexe, on a : $S = \mathbb{R}$ et donc $1 \in S$.

A.3.1. S est non vide car $0 \in S$:

On démontre que, pour tout $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, le problème $(\mathcal{L}_0, F)$ possède une solution dans $\mathcal{E}$:

Soit $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$.

On considère l'équation de la chaleur, avec condition de Neumann, au bord nulle et condition initiale $U_1 \in H^1(0, 1)$, c'est-à-dire le problème :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_t - c V_{xx} = F ; \\ V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) = 0 ; \\ V(0, x) = U_1(x). \end{array} \right.$$

Ce problème, bien connu, possède, sous les hypothèses $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $U_1 \in H^1(0, 1)$, une solution (unique) V appartenant à $L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$ telle que : $V_t \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$. L'existence de cette solution peut se démontrer à l'aide des semi-groupes [3]. Elle peut aussi être démontrée par la méthode de Galerkin [10].

On définit alors une fonction $U(t, x)$ en posant :

$$U(t, x) = U_0(x) + \int_0^t V(\tau, x) d\tau.$$

U vérifie $U_t(t, x) = V(t, x)$, donc U satisfait $(3)_{0, F}$. De plus U vérifie :

$$U_x(t, x) = U_{0, x}(x) + \int_0^t V_x(\tau, x) d\tau$$

et comme $V_x(\tau, 0)$ et $V_x(\tau, 1)$ sont nuls pour presque tout $\tau \in (0, T)$, on obtient, grâce à l'hypothèse $U_0 \in W$:

$$U_x(t, 0) \text{ et } U_x(t, 1) \text{ sont nuls pour presque tout } t \in (0, T),$$

c'est-à-dire : U satisfait (2).

Il reste à vérifier que U satisfait (1) pour avoir démontré que U est solution de $(\mathcal{L}_0, F)$.

$$U(0, x) = U_0(x) \text{ d'après la définition de } U,$$

et

$$U_t(0, x) = V(0, x) = U_1(x), \text{ grâce au choix de la condition initiale}$$

U_1 dans le problème de la chaleur dont V est solution.

On vérifie encore que U appartient à $\mathcal{E}$:

$$U, U_x \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \text{ car } V \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$$

$$\text{donc } V \in L^2(0, T; H^1(0, 1));$$

$$U_t = V \text{ donc } U_t \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \text{ et } U_{xt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1));$$

$c V_{xx} = V_t - F$, donc $V_{xx} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, et donc

$$U_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1));$$

$$U_{tt} = V_t \quad \text{donc} \quad U_{tt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1));$$

$$U_{xxt} = V_{xx} \quad \text{donc} \quad U_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

A.3.2. S est une partie ouverte de $\mathbb{R}$:

Soit $\lambda_0 \in S$. On démontre qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$|\lambda - \lambda_0| < \epsilon \Rightarrow \lambda \in S.$$

Pour cela on détermine $\epsilon > 0$ et on construit une famille

$\{\gamma_{\lambda, F}; \lambda \in \mathbb{R}, F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))\}$ d'opérateurs de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ tels que :

$$\text{Si } |\lambda - \lambda_0| < \epsilon,$$

alors pour tout $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $\gamma_{\lambda, F}$ possède un point fixe et ce point fixe est une solution de $(\mathcal{L}_{\lambda, F})$ appartenant à $\mathcal{E}$ (ce qui montre que λ appartient à S).

Si $U \in \mathcal{E}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle $\gamma_{\lambda, F} U$ la solution, appartenant à $\mathcal{E}$, du problème $(\mathcal{L}_{\lambda_0, \bar{F}})$ où

$$\bar{F} = L_{\lambda_0} U - L_{\lambda} U + F,$$

c'est-à-dire la solution $V \in \mathcal{E}$ du problème

$$(\mathcal{L}_{\lambda_0, \bar{F}}) \begin{cases} L_{\lambda_0} V = L_{\lambda_0} U - L_{\lambda} U + F (= \bar{F}); \\ V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) = 0; \\ V(0, x) = U_0(x), \quad V_t(0, x) = U_1(x). \end{cases}$$

Cette solution existe car $\lambda_0 \in S$, et $U \in \mathcal{E}$, $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$

donc $\bar{F} = L_{\lambda_0} U - L_{\lambda} U + F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$.

De plus on remarque que $\bar{F}$ s'écrit :

$$\bar{F} = F + (\lambda - \lambda_0) a U_{xx}$$

et on remarque que le lemme démontré ci-dessus fournit une estimation de la norme de V dans $\mathcal{E}$. En effet ce lemme a été démontré sous la seule hypothèse que a soit dans $\mathbb{R}$, et donc il est valable lorsqu'on remplace a par $\lambda_0 a$. On obtient :

$$(23) \quad \|V\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{\lambda_0 a, c, T} \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|\bar{F}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \|\bar{F}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 &\leq \left(\|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))} \right. \\ &\quad \left. + |\lambda - \lambda_0| \|a U_{xx}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))} \right)^2 \\ &\leq 2 \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \\ &\quad + 2 a^2 |\lambda - \lambda_0|^2 \|U_{xx}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \end{aligned}$$

et avec :

$$\|U_{xx}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \leq T \|U\|_{\mathcal{E}}^2.$$

De (23) on déduit donc :

$$(24) \quad \|V\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{\lambda_0 a, c, T} \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + 2 \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right. \\ \left. + 2 a^2 |\lambda - \lambda_0|^2 T \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \right).$$

On considère dans $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \{U \in \mathcal{E} ; \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq R^2\}$$

où

$$R^2 = 4 B_{\lambda_0 a, c, T} \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right).$$

$\mathcal{B}$ est une boule dans l'espace de Banach $\mathcal{E}$; de plus, pour

$$|\lambda - \lambda_0| < \epsilon = \frac{1}{2 |a| \sqrt{B_{\lambda_0 a, c, T} T}} \text{ et pour } F \in L^2(0,T; L^2(0,1))$$

quelconque, $\mathcal{V}_{\lambda, F}$ est une contraction de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$:

- On démontre que $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ entraîne : $\mathcal{V}_{\lambda, F}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$.

si $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ et si $U \in \mathcal{B}$, on déduit de (24) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}_{\lambda, F} U\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq B_{\lambda_0} a, c, T \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + 2 a^2 \epsilon^2 T \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \right) \\ &\leq B_{\lambda_0} a, c, T \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right) \right) \\ &\leq 4 B_{\lambda_0} a, c, T \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\mathcal{V}_{\lambda, F} U \in \mathcal{B}$.

- Pour $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$, $\mathcal{V}_{\lambda, F}$ est une contraction :

en effet, si $U_1, U_2 \in \mathcal{E}$, on pose $V = \mathcal{V}_{\lambda, F} U_1 - \mathcal{V}_{\lambda, F} U_2$ et $U = U_1 - U_2$.

Alors V est solution dans $\mathcal{E}$ du problème $(\mathcal{L}_{\lambda_0}, \tilde{F})$ avec conditions initiales nulles :

$$V(0, x) = 0, \quad V_t(0, x) = 0,$$

$$\text{et où} \quad \tilde{F} = L_{\lambda_0} U - L_{\lambda} U = (\lambda - \lambda_0) a U_{xx}.$$

(23) s'écrit donc dans ce cas :

$$\begin{aligned} \|V\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq B_{\lambda_0} a, c, T \|\tilde{F}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \\ &\leq B_{\lambda_0} a, c, T |\lambda - \lambda_0|^2 a^2 \|U_{xx}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \\ &\leq B_{\lambda_0} a, c, T \epsilon^2 a^2 T \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq \frac{1}{4} \|U\|_{\mathcal{E}}^2. \end{aligned}$$

Soit λ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon$ et soit $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$.
D'après le théorème de point fixe de Brouwer [13], $\mathcal{V}_{\lambda, F}$ possède un point fixe $U_{\lambda, F} \in \mathcal{B}$. Et un tel point fixe $U_{\lambda, F}$ est solution dans $\mathcal{E}$ du problème $(\mathcal{L}_{\lambda, F})$. Donc λ appartient à S , et S est ouvert.

A. 3. 3. S est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

Soit $\lambda \in \bar{S}$. On considère une suite $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de S qui converge vers λ (dans $\mathbb{R}$).

Soit $F \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$.

$\lambda_n \in S$, donc (par définition de S) il existe $U^{(n)} \in \mathcal{E}$ solution du problème $(\mathcal{L}_{\lambda_n, F})$. On démontre que la suite $\{U^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite est une suite de Cauchy dans $\mathcal{E}$:

U_n et U_m ($n, m \in \mathbb{N}$) satisfont respectivement $(3)_{\lambda_n, F}$ et $(3)_{\lambda_m, F}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} U_{tt}^{(n)} - c U_{xxt}^{(n)} - \lambda_n a U_{xx}^{(n)} &= F \\ U_{tt}^{(m)} - c U_{xxt}^{(m)} - \lambda_m a U_{xx}^{(m)} &= F \end{aligned}$$

d'où :

$$(U_{tt}^{(n)} - U_{tt}^{(m)}) - c(U_{xxt}^{(n)} - U_{xxt}^{(m)}) - \lambda_n a(U_{xx}^{(n)} - U_{xx}^{(m)}) = (\lambda_n - \lambda_m) a U_{xx}^{(m)}.$$

Ainsi : $U^{(n)} - U^{(m)} \in \mathcal{E}$, et est solution du problème

$$\begin{cases} L_{\lambda_n} U = (\lambda_n - \lambda_m) a U_{xx}^{(m)} ; \\ U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) = 0 ; \\ U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0. \end{cases}$$

L'estimation (20) du lemme s'écrit donc pour $(U^{(n)} - U^{(m)})$:

$$\begin{aligned} (25) \quad \|U^{(n)} - U^{(m)}\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq B_{\lambda_n a, c, T} \|(\lambda_n - \lambda_m) a U_{xx}^{(m)}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \\ &\leq B_{\lambda_n a, c, T} |\lambda_n - \lambda_m|^2 a^2 T \|U^{(m)}\|_{\mathcal{E}}^2 \end{aligned}$$

et on majore $\|U^{(m)}\|_{\mathcal{E}}^2$ grâce aussi à (20), car $U^{(m)}$ est solution du problème $(\mathcal{L}_{\lambda_m}, F)$:

$$(26) \quad \|U^{(m)}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{\lambda_m a, c, T} \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right).$$

De (25) et (26) on déduit :

$$(27) \quad \|U^{(n)} - U^{(m)}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{\lambda_n a, c, T} B_{\lambda_m a, c, T} |\lambda_n - \lambda_m|^2 a^2 T \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right).$$

Or la suite $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc bornée, et l'expression de $B_{\lambda a, c, T}$ donnée par (21) montre alors que la suite $\{B_{\lambda_n a, c, T}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < B_{\lambda_n a, c, T} B_{\lambda_m a, c, T} \leq C_0.$$

Et on déduit de (27) l'inégalité suivante :

$$(28) \quad \underline{\|U^{(n)} - U^{(m)}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq C |\lambda_n - \lambda_m|^2},$$

$$\text{où } C = C_0 a^2 T \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right),$$

vraie pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Par hypothèse la suite $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. (28) montre donc que la suite $\{U^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ étant un espace de Banach, la suite $\{U^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit $U \in \mathcal{E}$ la limite de cette suite. Il est immédiat que U vérifie $(3)_{\lambda, F}$. On démontre que U satisfait aussi (2) et (1).

Grâce à la compacité de l'injection de $H^1(0,1)$ dans $L^2(0,1)$, on peut utiliser un lemme de convergence uniforme de Lions [10] :

$\{U^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$, $\{U_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$, donc, quitte à extraire une sous-suite de la suite $\{U^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, on peut supposer que $\{U^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $C([0, T]; L^2(0, 1))$. La limite dans $C([0, T]; L^2(0, 1))$ sera U car la topologie de $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ est séparée. On aura donc :

$$U(0, x) = L^2(0, 1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} U^{(n)}(0, x)$$

or $U^{(n)}(0, x) = U_0(x)$, car $U^{(n)}$ vérifie (1). D'où :

$$U(0, x) = U_0(x) \text{ pour presque tout } x \in (0, 1).$$

De même, $\{U_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ et

$\{U_{xt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$, on démontre :

$$U_t(0, x) = U_1(x) \text{ pour presque tout } x \in (0, 1).$$

Et on démontre que U satisfait la condition au bord (2) en revenant à la bonne notion de solution (cf. préliminaires) :

$U^{(n)}$ vérifie : pour tout $V \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 U_{tt}^{(n)} V \, dx \, dt + c \int_0^T \int_0^1 U_{xt}^{(n)} V_x \, dx \, dt + \lambda_n a \int_0^T \int_0^1 U_x^{(n)} V_x \, dx \, dt \\ = \int_0^T \int_0^1 F V \, dx \, dt \end{aligned}$$

et $\{U^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers U dans $\mathcal{E}$, donc $\{U_{tt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$\{U_{xt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{U_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent fortement dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ vers respectivement U_{tt} , U_{xt} , U_x ; et U vérifie :

pour tout $V \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 U_{tt} V \, dx \, dt + c \int_0^T \int_0^1 U_{xt} V_x \, dx \, dt + \lambda a \int_0^T \int_0^1 U_x V_x \, dx \, dt \\ = \int_0^T \int_0^1 F V \, dx \, dt \end{aligned}$$

et on peut écrire, grâce à la formule de Green :

$$(29) \quad \int_0^T \int_0^1 (u_{tt} - c u_{xxt} - \lambda a u_{xx} - F) V \, dx \, dt = c \int_0^T (u_{xt}(t, 0) V(t, 0) - u_{xt}(t, 1) V(t, 1)) \, dt + \lambda a \int_0^T (u_x(t, 0) V(t, 0) - u_x(t, 1) V(t, 1)) \, dt.$$

Le premier membre est nul puisque u satisfait $(3)_\lambda$. On écrit alors

(29) pour $V \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$ de la forme :

$$V(t, x) = \varphi(t) \psi(x), \quad \varphi \in L^2(0, T), \quad \psi \in L^2(0, 1).$$

Et on choisit successivement ψ tel que $\psi(0) = 1, \psi(1) = 0$, puis tel que $\psi(0) = 0, \psi(1) = 1$, on obtient :

$$\int_0^T (c u_{xt}(t, 0) + \lambda a u_x(t, 0)) \varphi(t) \, dt = 0, \quad \text{pour tout } \varphi \in L^2(0, T)$$

donc :

$$c u_{xt}(t, 0) + \lambda a u_x(t, 0) = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T)$$

ce qui, joint à : $u_x(0, x) = u_{0,x}(x), u_0 \in W$ (ie $u_{0,x}(0) = u_{0,x}(1) = 0$)

donne :

$$u_x(t, 0) = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T).$$

Et de même :

$$u_x(t, 1) = 0 \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T).$$

u est donc une solution dans $\mathcal{E}$ du problème $(\mathcal{L}_\lambda, F)$, donc :

$\lambda \in S$ et S est fermé.

Cela termine la démonstration du théorème.

Remarque : la démonstration de ce théorème reste valable sous la seule hypothèse que a soit dans $\mathbb{R}^*$.

B) Un deuxième théorème d'existence et d'unicité pour le problème (ℓ_0)
sous des hypothèses de régularité plus fortes sur F et sous les hypo-
thèses $U_0 = 0$, $U_1 = 0$

THEOREME 2 :

Soient a , c , T trois nombres réels strictement positifs,
 F dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$, telle que F_t soit dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$.

Il existe un unique U appartenant à $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, avec
 $U_t, U_x, U_{xt}, U_{xx}, U_{tt}, U_{xtt}, U_{xxt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$,

$U_{ttt}, U_{xxtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, et vérifiant :

(i) pour presque tout $x \in (0, 1)$: $U(0, x) = 0$
 et $U_t(0, x) = 0$;

(ii) pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$U_x(t, 0) = 0,$$

$$U_x(t, 1) = 0 ;$$

(iii) au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour
 presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$U_{tt} - aU_{xx} - cU_{xxt} = F.$$

On démontre ce théorème à l'aide du théorème 1, puis on
 établit des estimations de U .

On note, dans ce qui suit, $\mathcal{E}_1$ l'espace des fonctions
 $U \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ telles que :

$$U_t, U_x, U_{xt}, U_{xx}, U_{tt}, U_{xtt}, U_{xxt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$U_{ttt}, U_{xxtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

Cet espace, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_1}$ définie par :

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{E}_1}^2 = & \|U\|^2 + \|U_t\|^2 + \|U_x\|^2 + \|U_{xt}\|^2 + \|U_{xx}\|^2 + \|U_{tt}\|^2 + \|U_{xtt}\|^2 \\ & + \|U_{xxt}\|^2 + \|U_{ttt}\|^2 + \|U_{xxtt}\|^2 \end{aligned}$$

(les 8 premières normes étant prises dans $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, et les deux dernières dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$) est un espace de Banach.

B.1. Démonstration du théorème 2 :

On suppose que F satisfait :

$$F, F_t \in L^2(0, T; H^1(0, 1)).$$

Ainsi $F \in \mathcal{C}([0, T], H^1(0, 1))$, et $F(0, \cdot) \in H^1(0, 1)$.

Le théorème 1 assure l'existence de $V \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, avec $V_t, V_x, V_{xt}, V_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$,

$V_{tt}, V_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, et vérifiant :

$$(31) \quad \begin{aligned} & \text{. pour presque tout } x \in (0, 1) : V(0, x) = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \text{et } V_t(0, x) = F(0, x); \end{aligned}$$

$$(32) \quad \begin{aligned} & \text{. pour presque tout } t \in (0, T) : \\ & \qquad V_x(t, 0) = 0, \\ & \qquad V_x(t, 1) = 0; \end{aligned}$$

$$(33) \quad \begin{aligned} & \text{. au sens des distributions de } \mathcal{D}'([0, T] \times]0, 1[) \text{ et pour} \\ & \text{presque tout } (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) : \\ & V_{tt} - a V_{xx} - c V_{xxt} = F_t. \end{aligned}$$

On définit une fonction $U(t, x)$ en posant :

$$(34) \quad U(t, x) = \int_0^t V(\tau, x) d\tau.$$

Alors U possède les régularités suivantes :

$$\left. \begin{aligned} & U, U_t, U_x, U_{xt}, U_{xx}, U_{tt}, \\ & U_{xtt}, U_{xxt} \end{aligned} \right\} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

et $U_{ttt}, U_{xxtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$.

U satisfait (30) :

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = V(0, x) = 0 \quad (\text{d'après (31)}).$$

U satisfait (2) :

$$U_x, U_{xt} \in L^2(0, T; H^1(0, 1)), \text{ donc } U_x \in \mathcal{C}([0, T]; H^1(0, 1)),$$

donc $U_x \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}([0, 1]))$, car $H^1(0, 1)$ est inclus dans $\mathcal{C}([0, 1])$. On sait de plus, par (30), que l'on a :

$$U_x(0, x) = 0 \text{ pour presque tout } x \in (0, 1).$$

On obtient donc :

$$U_x(0, 1) = U_x(0, 0) = 0.$$

Et de :

$$\begin{aligned} U_x(t, x) &= U_x(0, x) + \int_0^t U_{xt}(\tau, x) d\tau \\ &= U_x(0, x) + \int_0^t V_x(\tau, x) d\tau, \end{aligned}$$

on déduit alors (puisque $V_x(\tau, 1) = V_x(\tau, 0) = 0$ pour presque tout $\tau \in (0, T)$) :

$$U_x(t, 1) = 0, \quad U_x(t, 0) = 0 \text{ pour presque tout } t \in (0, T).$$

U satisfait (3) :

Remarquant que $U_t = V$, on peut écrire (33) sous la forme :

$$U_{ttt} - aU_{xxt} - cU_{xxtt} = F_t \text{ pour presque tout } (t, x) \in (0, T) \times (0, 1),$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} U_{tt}(t, x) - aU_{xx}(t, x) - cU_{xxt}(t, x) &= F(t, x) - F(0, x) + U_{tt}(0, x) \\ &\quad - aU_{xx}(0, x) - cU_{xxt}(0, x). \end{aligned}$$

$$\text{Or : } U_{xx}(0, x) = 0, \quad U_{xxt}(0, x) = 0 \text{ d'après (30)}$$

$$U_{tt}(0, x) = V_t(0, x) = F(0, x) \text{ d'après (31).}$$

D'où :

$$U_{tt} - aU_{xx} - cU_{xxt} = F \text{ pour presque tout } (t, x) \in (0, T) \times (0, 1).$$

On a montré ainsi que U définie par (34) satisfait (30), (2) et (3).

Et une telle solution appartient nécessairement à $\mathcal{E}$ donc est unique, d'après l'unicité démontrée au théorème 1 démontrée au paragraphe A.2.

Remarque : la démonstration de ce théorème reste valable sous la seule hypothèse que a soit dans $\mathbb{R}^*$.

B.2. Des estimations pour la solution U définie au paragraphe B.1. :

B.2.1. Le lemme démontré dans la partie A montre déjà qu'on a :

$$(35) \quad \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{a,c,T} \|F\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2$$

(cas particulier $U_0 = 0$, $U_1 = 0$ de ce lemme).

B.2.2. Le lemme démontré dans la partie A, appliqué à $V = U_t$ montre qu'on a :

$$\|V\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{a,c,T} \left(\|V_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|V_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right)$$

avec : $V_0 = 0$, $V_1 = F(0)$.

D'où :

$$(36) \quad \|U_t\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{a,c,T} \left(\|F(0)\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right).$$

B.2.3. Estimation de $\|U\|_{\mathcal{E}_1}^2$:

On remarque qu'on a :

$$\|U\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leq \|U\|_{\mathcal{E}}^2 + \|U_t\|_{\mathcal{E}}^2.$$

Ainsi on déduit de (35) et (36) l'estimation :

$$(37) \quad \underline{\|U\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leq B_{a,c,T} \left(\|F(0)\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 + \|F_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right).}$$

- CHAPITRE II -

ETUDE DU PROBLEME (L_g)
=====

A) Un théorème d'existence et d'unicité pour le problème (L_g)

THEOREME 3 :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs,
 $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $u_0 \in H^2(0, 1)$ et $u_1 \in H^1(0, 1)$, g_0 et g_1 dans
 $H^1(0, T)$.

Il existe un unique u appartenant à $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ avec

$$u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$$

$$u_{tt}, u_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)),$$

et vérifiant :

(i) pour presque tout $x \in (0, 1)$: $u(0, x) = u_0(x)$

et

$$u_t(0, x) = u_1(x);$$

(ii) pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$-a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) = g_0(t),$$

$$+a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) = g_1(t);$$

(iii) au sens des distributions de $\mathcal{D}'(]0, T[\times]0, 1[)$ et pour
presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} = f.$$

On démontre ce théorème en se ramenant au problème (ℓ_o) ,
(théorème 1), grâce à un changement de fonction :

A. 1. Démonstration du théorème 3 :

A. 1. 1. Définition d'une fonction auxiliaire $\tilde{u}(t, x)$:

L'équation différentielle ordinaire en $y(t)$:

$$a y(t) + c y'(t) = h(\lambda, t) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

admet pour solutions les fonctions :

$$y_{\lambda}(t) = \frac{1}{c} \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} h(\lambda, \tau) d\tau + C_{\lambda, o} e^{-\frac{a}{c}t}, \quad C_{\lambda, o} \in \mathbb{R}.$$

Soit $\tilde{g}(t, x)$ définie par :

$$\tilde{g}(t, x) = x g_1(t) - (1-x) g_o(t).$$

On définit une fonction $\tilde{u}(t, x)$ en posant :

$$(38) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(t, x) = & \frac{1}{c} \int_0^x \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ & + \left[\left(x - \frac{x^2}{2} \right) u_{o, x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{o, x}(1) \right] e^{-\frac{a}{c}t}. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\tilde{u}_x(t, x) = \frac{1}{c} \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}(\tau, x) d\tau + [(1-x) u_{o, x}(0) + x u_{o, x}(1)] e^{-\frac{a}{c}t}$$

et $\tilde{u}$ vérifie :

$$(38') \quad \begin{cases} a \tilde{u}_x(t, 0) + c \tilde{u}_{xt}(t, 0) = \tilde{g}(t, 0), \\ a \tilde{u}_x(t, 1) + c \tilde{u}_{xt}(t, 1) = \tilde{g}(t, 1). \end{cases}$$

De plus :

$$\tilde{u}_t(t, x) = -\frac{a}{c} \tilde{u}(t, x) + \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}(t, \xi) d\xi ;$$

$$\tilde{u}_{xx}(t, x) = \frac{1}{c} \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}_x(\tau, x) d\tau + [-u_{o, x}(0) + u_{o, x}(1)] e^{-\frac{a}{c}t} ;$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt}(t, x) &= -\frac{a}{c} \tilde{u}_t(t, x) + \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}_t(t, \xi) d\xi \\ &= \frac{a^2}{c^2} \tilde{u}(t, x) - \frac{a}{c^2} \int_0^x \tilde{g}(t, \xi) d\xi + \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}_t(t, \xi) d\xi ;\end{aligned}$$

$$\tilde{u}_{xt}(t, x) = -\frac{a}{c} \tilde{u}_x(t, x) + \frac{1}{c} \tilde{g}(t, x) ;$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{xxt}(t, x) &= \frac{1}{c} \tilde{g}_x(t, x) - \frac{a}{c^2} \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}_x(\tau, x) d\tau \\ &\quad - \frac{a}{c} [-u_{0,x}(0) + u_{0,x}(1)] e^{-\frac{a}{c}t} .\end{aligned}$$

On a donc :

$$(39) \quad \underline{\tilde{u}_{tt}(t, x) - a\tilde{u}_{xx}(t, x) - c\tilde{u}_{xxt}(t, x) = \tilde{f}(t, x)},$$

avec :

$$\begin{aligned}(40) \quad \tilde{f}(t, x) &= \frac{a^2}{c^3} \int_0^x \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}(\tau, \xi) d\tau d\xi - \frac{a}{c^2} \int_0^x \tilde{g}(t, \xi) d\xi - \tilde{g}_x(t, x) \\ &\quad + \frac{a^2}{c^2} \left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right) u_{0,x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{0,x}(1) \right] e^{-\frac{a}{c}t} + \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}_t(t, \xi) d\xi .\end{aligned}$$

On obtient de plus :

$$(41) \quad \begin{cases} \tilde{u}(0, x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) u_{0,x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{0,x}(1), \\ \tilde{u}_t(0, x) = \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}(0, \xi) d\xi - \frac{a}{c} \left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right) u_{0,x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{0,x}(1) \right]. \end{cases}$$

A.1.2. Démonstration de l'existence d'une solution u :

On fixe a, c, T trois nombres réels positifs strictement, et on fixe $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, $u_0 \in H^2(0, 1)$, $u_1 \in H^1(0, 1)$, $g_0, g_1 \in H^1(0, T)$.

$$(42) \quad \text{On considère } F = f - \tilde{f}, \text{ où } \tilde{f} \text{ est définie par (40).}$$

Les hypothèses faites sur g_0 et g_1 assurent qu'on a :

$\tilde{f} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$; comme de plus $f \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, on obtient :

$$F \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

On pose :

$$(43) \quad \begin{cases} U_0(x) = u_0(x) - \tilde{u}(0, x), \\ U_1(x) = u_1(x) - \tilde{u}_t(0, x), \end{cases}$$

où $\tilde{u}(0, x)$ et $\tilde{u}_t(0, x)$ sont donnés par (41).

U_1 ainsi définie appartient à $H^1(0, 1)$ et U_0 ainsi définie appartient à $H^2(0, 1)$. De plus :

$$\begin{aligned} U_{0,x}(x) &= u_{0,x}(x) - \tilde{u}_x(0, x) \\ &= u_{0,x}(x) - [(1-x)u_{0,x}(0) + xu_{0,x}(1)]. \end{aligned}$$

Donc :

$$U_{0,x}(0) = 0, \quad U_{0,x}(1) = 0, \quad \text{ie } U_0 \in W.$$

F, U_0, U_1 vérifient les hypothèses du théorème 1 d'existence (et d'unicité) démontré pour le problème (ℓ_0) . Il existe donc un (unique) U appartenant à $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, avec

$$U_t, U_x, U_{xt}, U_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$U_{tt}, U_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)),$$

vérifiant (1) (2) (3).

On pose :

$$u = U + \tilde{u}$$

et on démontre que u est une solution du problème (L_g) au sens du théorème ci-dessus :

Il est clair qu'on a, pour presque tout $x \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= U(0, x) + \tilde{u}(0, x) \\ &= u_0(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(0, x) &= U_t(0, x) + \tilde{u}_t(0, x) \\ &= u_1(x). \end{aligned}$$

De plus :

$$\tilde{u}, \tilde{u}_t, \tilde{u}_x, \tilde{u}_{xt}, \tilde{u}_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$\tilde{u}_{tt}, \tilde{u}_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

On aura donc bien la régularité cherchée pour $u : u \in \mathcal{E}$.

Au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} &= (U + \tilde{u})_{tt} - a (U + \tilde{u})_{xx} - c (U + \tilde{u})_{xxt} \\ &= (U_{tt} - a U_{xx} - c U_{xxt}) + (\tilde{u}_{tt} - a \tilde{u}_{xx} - c \tilde{u}_{xxt}) \\ &= F + \tilde{f} = f. \end{aligned}$$

Et on vérifie de même que u vérifie la bonne condition au bord (ii).

A. 1. 3. Unicité de la solution :

Il s'agit de démontrer que si $u \in \mathcal{E}$ vérifie

$$(44) \quad u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} = 0 \quad \text{au sens des distributions et pour presque tout } (t, x) \in (0, T) \times (0, 1),$$

$$(45) \quad \left. \begin{aligned} a u_x(t, 0) + c u_{xt}(t, 0) &= 0 \\ a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T),$$

$$(46) \quad u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0 \quad \text{pour presque tout } x \in (0, 1),$$

alors nécessairement :

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour presque tout } (t, x) \in (0, T) \times (0, 1).$$

On multiplie (44) par u_t et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$. On obtient :

$$(47) \quad \int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_t dx dt - \int_0^s \int_0^1 (a u_{xx} + c u_{xxt}) u_t dx dt = 0,$$

et on remarque que :

$$\begin{aligned} - \int_0^s \int_0^1 (a u_{xx} + c u_{xxt}) u_t dx dt &= - \int_0^s dt \left(\int_0^1 (a u_x + c u_{xt})_x u_t dx \right) \\ &= - \int_0^s \left[(a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1)) u_t(t, 1) - (a u_x(t, 0) + c u_{xt}(t, 0)) u_t(t, 0) \right] dt \\ &\quad + \int_0^s \int_0^1 (a u_x + c u_{xt}) u_{xt} dx dt \\ &= \int_0^s \int_0^1 a u_x u_{xt} dx dt + c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \quad (\text{en tenant compte de (43)}). \end{aligned}$$

(47) s'écrit donc :

$$\int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_t dx dt + \int_0^s \int_0^1 a u_x u_{xt} dx dt + c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt = \\ \|u_t(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(0)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0, \end{aligned}$$

(pour presque tout $s \in (0, T)$).

On en déduit, compte tenu de $a > 0$, $c > 0$:

$$\text{pour presque tout } s \in (0, T) : \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0;$$

et comme on a pour $t \in (0, T)$:

$$\|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 \|u(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2t \int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 ds,$$

on aura :

$$\text{pour presque tout } t \in (0, T) : \|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0.$$

On conclut :

pour presque tout $t \in (0, T)$, pour presque tout $x \in (0, 1)$,
c'est-à-dire pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$u(t, x) = 0.$$

A.2. Des estimations pour la solution u du problème (L_g) :

On obtient une estimation pour $\|u\|_{\mathcal{E}}$, où u désigne la solution du problème (L_g) , à partir des estimations de $\|U\|_{\mathcal{E}}$ et $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{E}}$.

A.2.1. Estimation de $\|U\|_{\mathcal{E}}$:

L'inégalité (20) obtenue dans le lemme du Chapitre I, partie A, s'écrit pour U :

$$(48) \quad \|U\|_{\mathcal{E}}^2 \leq B_{a,c,T} \left(\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|F\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right),$$

où F est donné par (34), U_0 , U_1 sont donnés par (43).

On a donc :

$$\|U_0\|_{H^2(0,1)}^2 \leq 2 \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + 2 \|\tilde{u}(0, \cdot)\|_{H^2(0,1)}^2$$

avec

$$\tilde{u}(0, x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) u_{0,x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{0,x}(1), \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(0, \cdot)\|_{H^2(0,1)}^2 &= \int_0^1 \left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right) u_{0,x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{0,x}(1) \right]^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \left[(1-x) u_{0,x}(0) + x u_{0,x}(1) \right]^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \left[-u_{0,x}(0) + u_{0,x}(1) \right]^2 dx \\ &\leq 2 \left(u_{0,x}(0) \right)^2 \int_0^1 \left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + (1-x)^2 + 1 \right] dx \\ &\quad + 2 \left(u_{0,x}(1) \right)^2 \int_0^1 \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1 \right) dx. \end{aligned}$$

Or $U_{0,x} \in H^1(0,1)$, et l'injection

$$H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1])$$

est continue, donc il existe $k_0 > 0$ tel que

$$\forall v \in H^1(0,1), \quad \sup_{x \in [0,1]} |v(x)| \leq k_0 \|v\|_{H^1(0,1)}.$$

Il existe donc $c_1 > 0$,

$$c_1 = 2 k_o^2 \int_0^1 \left[\left(x - \frac{x^2}{2} \right)^2 + (1-x)^2 + 1 + \frac{x^4}{4} + x^2 + 1 \right] dx,$$

tel que :

$$\|\tilde{u}(0, \cdot)\|_{H^2(0,1)}^2 \leq c_1 \|u_o, x\|_{H^1(0,1)}^2 \leq c_1 \|u_o\|_{H^2(0,1)}^2.$$

D'où :

$$(49) \quad \underline{\|U_o\|_{H^2(0,1)}^2 \leq 2(1+c_1) \|u_o\|_{H^2(0,1)}^2}.$$

Pour U_1 , on a :

$$\|U_1\|_{H^1(0,1)}^2 \leq 2 \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + 2 \|\tilde{u}_t(0, \cdot)\|_{H^1(0,1)}^2,$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(0, x) &= -\frac{a}{c} \tilde{u}(0, x) + \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}(0, \xi) d\xi \\ &= -\frac{a}{c} \tilde{u}(0, x) + \frac{1}{c} g_o(0) \int_0^x (\xi-1) d\xi + \frac{1}{c} g_1(0) \int_0^x \xi d\xi. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_t(0, \cdot)\|_{H^1(0,1)}^2 &\leq \frac{3a^2}{c^2} \|\tilde{u}(0, \cdot)\|_{H^1(0,1)}^2 \\ &\quad + \frac{3}{c^2} (g_o(0))^2 \int_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right)^2 + (x-1)^2 \right] dx \\ &\quad + \frac{3}{c^2} (g_1(0))^2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx. \end{aligned}$$

Il existe donc $c_2 > 0$,

$$c_2 = \frac{3}{c^2} \sup \left(a^2 c_1, k_o'^2 \int_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right)^2 + (x-1)^2 \right] dx, k_o'^2 \int_0^1 (x^2 + 1) dx \right),$$

tel que :

$$\|\tilde{u}_t(0, \cdot)\|_{H^1(0,1)}^2 \leq c_2 \left(\|u_o\|_{H^2(0,1)}^2 + \|g_o\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right)$$

(k_o' désigne une constante > 0 telle que :

$$\forall v \in H^1(0, T), \quad \sup_{t \in [0, T]} |v(t)| \leq k_o' \|v\|_{H^1(0, T)}).$$

D'où :

$$(50) \quad \frac{\|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 \leq c_2' \left(\|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right)}{}$$

avec $c_2' = \sup (2, 2 c_2)$.

Il reste à majorer $\|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2$, et donc à majorer

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}, \quad \tilde{f} \text{ étant donné par (40) :}$$

il existe des constantes $c_3, c_4 > 0$ telles que : pour $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$ on ait :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(t, x)| &\leq k_o' \left(\frac{a^2}{3} T + \frac{|a|}{c^2} c_3 + 1 \right) \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)} + \|g_1\|_{H^1(0,T)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{c} c_4 \left(|g_{0,t}(t)| + |g_{1,t}(t)| \right) + \frac{a^2}{c^2} \left| \left(x - \frac{x^2}{2} \right) u_{0,x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{0,x}(1) \right| \end{aligned}$$

donc :

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \leq c_5 \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 \right)$$

$$\text{où } c_5 = \sup \left(6 T k_o'^2 \left(\frac{a^2}{3} T + \frac{|a|}{c^2} c_4 + 1 \right)^2 + 6 \frac{c_4^2}{c^2}, \frac{3 a^2}{c^2} c_1 \right).$$

On obtient donc :

$$\frac{\|F\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 + 2 \|\tilde{f}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2}{}$$

(51)

$$\begin{aligned} &\leq c_5' \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{où } c_5' = \sup (2, 2 c_5).$$

Finalement, on déduit de (48), (49), (50), (51) qu'il existe une constante $C_{a,c,T}' > 0$, dépendant de a, c, T telle que :

(52)

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{E}}^2 \leq & \frac{C'_{a,c,T} \left(\|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 \right.}{\left. + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \right)} \\ & \left(C'_{a,c,T} = B_{a,c,T} \sup \left(2 + 2c_2, c'_3, c'_5 \right) \right). \end{aligned}$$

A.2.2. Estimation de $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{E}}$:

De (38) on déduit : pour $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(t, x)| \leq & \frac{1}{c} T k'_0 \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)} + \|g_1\|_{H^1(0,T)} \right) \\ & + \left| \left(x - \frac{x^2}{2} \right) u_{0,x}(0) + \frac{x^2}{2} u_{0,x}(1) \right| \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H^2(0,1)}^2 & \leq c_6 \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 \right) \\ \text{avec } c_6 & = \sup \left(\frac{4 T^2 k'^2_0}{c^2}, c_1 \right). \end{aligned}$$

De même on obtient :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_t(t, \cdot)\|_{H^1(0,1)}^2 & \leq \frac{3a^2}{c^2} \|\tilde{u}(t, \cdot)\|_{H^1(0,1)}^2 + c_2 \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right) \\ & \leq c_7 \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 \right) \\ \text{avec } c_7 & = \sup \left(\frac{3a^2}{c^2} c_6, c_2 \right). \end{aligned}$$

Et aussi :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{tt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 & \leq c_8 \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 \right), \\ \|\tilde{u}_{xxt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 & \leq c_9 \left(\|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 \right) \end{aligned}$$

(cette dernière inégalité étant obtenue par exemple à partir de (39)).

On montre ainsi qu'il existe une constante $C''_{a,c,T}$ dépendant de a, c, T , telle que :

$$(53) \quad \underline{\|\tilde{u}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq C''_{a,c,T} \left(\|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right)}$$

avec $(C''_{a,c,T} = c_6 + c_7 + c_8 + c_9)$.

A.2.3. Conclusion :

(52) et (53) donnent, en posant $C_{a,c,T} = 2(C'_{a,c,T} + C''_{a,c,T})$:

(54)

$$\|u\|_{\mathcal{E}}^2 \leq C_{a,c,T} \left(\|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|g_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right)$$

B) Un deuxième théorème d'existence et d'unicité pour le problème (L_g)

THEOREME 4 :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs, g_0 et g_1 dans $H^2(0, T)$ avec $g_0(0) = 0$, $g_1(0) = 0$.

Il existe un unique u appartenant à $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, avec $u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, u_{xtt}, u_{xxt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$,

$u_{ttt}, u_{xxtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, et vérifiant :

(i) pour presque tout $x \in (0, 1)$: $u(0, x) = 0$

et

$$u_t(0, x) = 0 ;$$

(ii) pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$-a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) = g_0(t),$$

$$+a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) = g_1(t) ;$$

(iii) au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} = 0.$$

On démontre ce théorème en se ramenant au problème (ℓ_0) , théorème 2, à l'aide d'un changement de fonction :

B.1. Démonstration du théorème 4 :

B.1.1. On pose :

$$(55) \quad \tilde{u}(t, x) = \frac{1}{c} \int_0^x \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}(\tau, x) d\tau,$$

$$\text{où } \tilde{g}(t, x) = x g_1(t) - (1-x) g_0(t).$$

et on pose :

$$(\tilde{u}_{tt} - a \tilde{u}_{xx} - c \tilde{u}_{xxt})(t, x) = \tilde{f}(t, x).$$

Donc :

$$(56) \quad \begin{aligned} \tilde{f}(t, x) = & \frac{a^2}{3} \int_0^x \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}(\tau, \xi) d\tau d\xi - \frac{a}{2} \int_0^x \tilde{g}(t, \xi) d\xi \\ & + \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}_t(t, \xi) d\xi - \tilde{g}_x(t, x). \end{aligned}$$

Des calculs analogues à ceux des pages 32 et 33 donnent $\tilde{u}_t, \tilde{u}_x, \tilde{u}_{xt}, \tilde{u}_{tt}, \tilde{u}_{xx}, \tilde{u}_{xtt}, \tilde{u}_{xxt}$ et montrent déjà qu'on a, sous les hypothèses du théorème 4 :

$$\tilde{u} \in \mathcal{E}.$$

On démontre qu'on a :

$$\tilde{u} \in \mathcal{E}_1.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer, pour cela, $\tilde{u}_t \in \mathcal{E}$:

- . $\tilde{u}_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, grâce à l'hypothèse $g_0, g_1 \in H^2(0, T)$ qui entraîne $g_{0,t}, g_{1,t} \in C([0, T])$, donc $g_{0,t}, g_{1,t} \in L^\infty(0, T)$.
- . $\tilde{u}_{xt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ car $\tilde{u} \in \mathcal{E}$.
- . $\tilde{u}_{xtt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$:

L'expression de $\tilde{u}_{xt}$ calculée à la page 33 donne :

$$\tilde{u}_{xtt}(t, x) = -\frac{a}{c} \tilde{u}_{xt}(t, x) + \frac{1}{c} \tilde{g}_t(t, x) ; \text{ donc } \tilde{u}_{xtt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$$

grâce à l'hypothèse $g_0, g_1 \in H^2(0, T)$, et parce que $\tilde{u}_{xt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$.

. $\tilde{u}_{xxt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$: c'est immédiat quand on regarde l'expression de $\tilde{u}_{xxt}$ écrite page 33.

$$\tilde{u}_{ttt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)) \quad \text{car}$$

$$\tilde{u}_{ttt}(t, x) = \frac{a^2}{2} \tilde{u}_t(t, x) - \frac{a}{2} \int_0^x \tilde{g}_t(t, \xi) d\xi + \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}_{tt}(t, \xi) d\xi \quad \text{est somme}$$

de deux éléments de $L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ et d'un élément de $L^2(0, T; L^2(0, 1))$.

. $\tilde{u}_{xxtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$: c'est immédiat.

(57) $\tilde{u}$ définie par (55), sous les hypothèses du théorème 4, appartient donc à l'espace $\mathcal{E}_1$.

Quant à $\tilde{f}$, définie par (56), on démontre qu'elle satisfait :

(58) $\tilde{f}, \tilde{f}_t \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$:

. grâce à l'hypothèse $g_0, g_1 \in H^2(0, 1)$, il est déjà clair qu'on a

$$\tilde{f}, \tilde{f}_t \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

. on calcule $\tilde{f}_x$:

$$\tilde{f}_x(t, x) = \frac{a^2}{c^3} \int_0^t e^{-\frac{a}{c}(t-\tau)} \tilde{g}(\tau, x) d\tau - \frac{a}{c^2} \tilde{g}(t, x) + \frac{1}{c} \tilde{g}_t(t, x) - \tilde{g}_{xx}(t, x)$$

on vérifie donc qu'on a : $\tilde{f}_x, \tilde{f}_{xt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$.

(58) est donc démontré.

De plus on a :

$$(59) \quad \begin{cases} \tilde{u}(0, x) = 0 \\ \tilde{u}_t(0, x) = \frac{1}{c} \int_0^x \tilde{g}(0, \xi) d\xi = 0, \quad \text{car } g_0(0) = g_1(0) = 0. \end{cases}$$

B.1.2. Existence de la solution u :

On considère $F = -\tilde{f}$; F satisfait, d'après (58) :

$$F, F_t \in L^2(0, T; H^1(0, 1)).$$

Le théorème 2 appliqué pour la donnée F montre qu'il existe un (unique) $U \in \mathcal{E}_1$ solution du problème (ℓ_0) avec conditions initiales nulles.

On pose :

$$u = U + \tilde{u}$$

et on démontre que u convient, c'est-à-dire que u appartient à $\mathcal{E}_1$ (car $\tilde{u}$ et U appartiennent à $\mathcal{E}_1$) et est solution du problème (L_g) avec conditions initiales nulles :

. pour presque tout $x \in (0, 1)$ on a :

$$u(0, x) = 0,$$

$$u_t(0, x) = 0, \text{ grâce à (59) et à (i) du théorème 2.}$$

. pour presque tout $t \in (0, T)$ on a :

$$\begin{aligned} a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) &= a U_x(t, 1) + c U_{xt}(t, 1) + (a \tilde{u}_x(t, 1) + c \tilde{u}_{xt}(t, 1)) \\ &= 0 + 0 + g_1(t), \text{ d'après (38')} \end{aligned}$$

et (ii) du théorème 2,

et de même en $x = 0$.

. au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} &= (U_{tt} - a U_{xx} - c U_{xxt}) + (\tilde{u}_{tt} - a \tilde{u}_{xx} - c \tilde{u}_{xxt}) \\ &= F + \tilde{f} = 0. \end{aligned}$$

L'existence de $u \in \mathcal{E}_1$ est donc démontrée.

Unicité : la démonstration est la même qu'au paragraphe A. 1. 3.

B.2. On établit des estimations pour u , solution du problème (L_g) avec conditions initiales nulles, sous les hypothèses du théorème 4 :

Toutes les régularités obtenues pour u donnent un sens aux calculs qui suivent.

B.2.1. On multiplie (iii) par u_t et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$. On obtient :

$$(60) \quad \int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_t \, dx \, dt - \int_0^s \int_0^1 (a u_{xx} + c u_{xxt}) u_t \, dx \, dt = 0.$$

Le théorème de Fubini, et (ii) permettent de transformer (60) et d'obtenir :

$$(61) \quad \begin{aligned} \int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_t \, dx \, dt + \int_0^s \int_0^1 (a u_x + c u_{xt}) u_{xt} \, dx \, dt \\ = \int_0^s (g_1(t) u_t(t, 1) + g_0(t) u_t(t, 0)) \, dt ; \end{aligned}$$

$u_t(t, 1)$ et $u_t(t, 0)$ ont un sens car $u_t \in L^\infty(0, T; H^1(0, 1))$ et $H^1(0, 1)$ est inclus dans $C([0, 1])$, l'injection étant continue. k_0 étant la constante définie page 37, on peut écrire la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^s g_1(t) u_t(t, 1) \, dt \right| &\leq \int_0^s 2 \left| \epsilon g_1(t) \right| \left| \frac{1}{\epsilon} u_t(t, 1) \right| \, dt \quad (\epsilon > 0) \\ &\leq 2 \int_0^s \left| \epsilon g_1(t) \right| \frac{k_0}{\epsilon} \|u_t(t)\|_{H^1(0, 1)} \, dt \\ &\leq \epsilon^2 \int_0^s |g_1(t)|^2 \, dt + \frac{k_0^2}{\epsilon^2} \int_0^s \|u_t(t)\|_{H^1(0, 1)}^2 \, dt \\ &\leq \epsilon^2 \|g_1\|_{L^2(0, T)}^2 + \frac{k_0^2}{\epsilon^2} \int_0^s \|u_t(t)\|_{L^2(0, 1)}^2 \, dt \\ &\quad + \frac{k_0^2}{\epsilon^2} \int_0^s \|u_{xt}(t)\|_{L^2(0, 1)}^2 \, dt. \end{aligned}$$

On déduit alors de (61), compte tenu de (i) :

$$\begin{aligned}
 (62) \quad & \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \\
 & \leq \epsilon^2 \left(\|g_1\|_{L^2(0,T)}^2 + \|g_0\|_{L^2(0,T)}^2 \right) \\
 & + \frac{2k_o^2}{\epsilon^2} \int_0^s \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt + \frac{2k_o^2}{\epsilon^2} \int_0^s \|u_{xt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt.
 \end{aligned}$$

En choisissant à présent $\epsilon > 0$ tel que $\frac{2k_o^2}{\epsilon^2} = c$, (62) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \\
 & \leq \frac{2k_o^2}{c} \left(\|g_1\|_{L^2(0,T)}^2 + \|g_0\|_{L^2(0,T)}^2 \right) + c \int_0^s \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt,
 \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
 (63) \quad & \frac{\|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt}{\leq C_1 + c \int_0^s \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt},
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{2k_o^2}{c} \left(\|g_1\|_{L^2(0,T)}^2 + \|g_0\|_{L^2(0,T)}^2 \right).$$

En particulier :

$$\|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_1 + c \int_0^s \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt.$$

Il résulte alors du lemme de Gronwall que l'on a :

$$\begin{aligned}
 (64) \quad & \text{pour presque tout } s \in [0, T] : \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_1 e^{cT}, \\
 & \text{pour presque tout } s \in [0, T] : \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C_1 e^{cT}}{a}, \\
 & \text{et } \|u_{xt}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \leq \frac{C_1 e^{cT}}{c}.
 \end{aligned}$$

On en déduit, à l'aide de (16), et compte tenu de (i) :

pour presque tout $s \in [0, T]$: $\|u(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 T C_1 (e^T - 1)$.

B.2.2. On dérive (iii) en t , on multiplie par u_{tt} et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$. On obtient :

$$(65) \quad \int_0^s \int_0^1 u_{ttt} u_{tt} dx dt - \int_0^s \int_0^1 (a u_{xt} + c u_{xxt})_x u_{tt} dx dt = 0.$$

Le théorème de Fubini, et (ii) dérivé en t , permettent de transformer (65) et d'obtenir :

$$(66) \quad \int_0^s \int_0^1 u_{ttt} u_{tt} dx dt + \int_0^s \int_0^1 (a u_{xt} + c u_{xxt}) u_{xxt} dx dt \\ = \int_0^s (g_{1,t}(t) u_{tt}(t, 1) + g_{0,t}(t) u_{tt}(t, 0)) dt ;$$

$u_{tt}(t, 1)$ et $u_{tt}(t, 0)$ ont un sens car $u_{tt} \in L^2(0, T; H^1(0, 1))$.

On déduit de (66) par des calculs analogues aux calculs permettant de passer de (61) à (63), l'inégalité suivante :

$$(67) \quad \|u_{tt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \\ \leq \frac{2k_o^2}{c} (\|g_{1,t}\|_{L^2(0,T)}^2 + \|g_{0,t}\|_{L^2(0,T)}^2) \\ + \|u_{tt}(0)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^s \|u_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt.$$

et on remarque que, compte tenu de (iii) :

$$u_{tt}(0) = a u_{xx}(0) + c u_{xxt}(0) = 0, \quad \text{grâce à (i).}$$

(67) s'écrit donc :

$$(68) \quad \frac{\|u_{tt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^s \int_0^1 u_{xxt}^2 dx dt}{\leq C_2 + c \int_0^s \|u_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt},$$

$$\text{avec } C_2 = \frac{2k_o^2}{c} (\|g_{1,t}\|_{L^2(0,T)}^2 + \|g_{0,t}\|_{L^2(0,T)}^2).$$

Il résulte alors du lemme de Gronwall que l'on a :

$$\begin{aligned}
 & \text{pour presque tout } s \in [0, T] : \|u_{tt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_2 e^{cT}, \\
 (69) \quad & \text{pour presque tout } s \in [0, T] : \|u_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C_2 e^{cT}}{a}, \\
 & \text{et } \|u_{xtt}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \leq \frac{C_2 e^{cT}}{c}.
 \end{aligned}$$

B.2.3. On multiplie (iii) par u_{xx} et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$; on obtient :

$$(70) \quad \int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_{xx} dx dt - a \int_0^s \int_0^1 u_{xx}^2 dx dt - c \int_0^s \int_0^1 u_{xxt} u_{xx} dx dt = 0$$

c'est-à-dire, compte tenu de (i) :

$$2a \int_0^s \int_0^1 u_{xx}^2 dx dt + c \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 = 2 \int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_{xx} dx dt.$$

D'où :

$$2a \int_0^s \int_0^1 u_{xx}^2 dx dt + c \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \int_0^s \int_0^1 u_{tt}^2 dx dt + \int_0^s \int_0^1 u_{xx}^2 dx dt$$

et encore, grâce à (69) :

$$(71) \quad 2a \int_0^s \int_0^1 u_{xx}^2 dx dt + c \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq C_3 + \int_0^s \|u_{xx}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt,$$

$$\text{avec } C_3 = C_2 \frac{e^{cT} - 1}{c}.$$

Il résulte alors du lemme de Gronwall que l'on a :

$$(72) \quad \text{pour presque tout } s \in [0, T] : \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{C_3 e^{\frac{1}{c}T}}{c}.$$

B.2.4. Une dernière estimation pour la norme de u_{ttt} dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$:

On obtient une estimation pour u_{ttt} , en revenant à la "construction" de u :

$$u = U + \tilde{u} \quad (\text{cf. B. 1.2.}).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|u_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 &\leq 2 \|U_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \\ &\quad + 2 \|\tilde{u}_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2. \end{aligned}$$

- Estimation de $\|U_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}$:

$U \in \mathcal{E}_1$ est la solution définie au théorème 2, avec $F = -\tilde{f}$, $\tilde{f}$ étant donnée par (56). Ainsi l'estimation (37) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (73) \quad \|U_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 &\leq \|U\|_{\mathcal{E}_1}^2 \\ &\leq B_{a, c, T} \left(\|\tilde{f}(0)\|_{H^1(0, 1)}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{f}_t\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \right). \end{aligned}$$

Cela donne lieu au même type de calculs qu'au paragraphe A. 1. de ce chapitre : il existe des constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(t, x)| &\leq k'_0 \left(\frac{a^2}{c^3} T + \frac{a}{c^2} k_1 + 1 \right) \left(\|g_0\|_{H^1(0, T)} + \|g_1\|_{H^1(0, T)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{c} k_2 \left(|g_{0,t}(t)| + |g_{1,t}(t)| \right) \end{aligned}$$

donc :

$$(74) \quad \|\tilde{f}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq k_3 \left(\|g_0\|_{H^1(0, T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0, T)}^2 \right),$$

$$\text{où} \quad k_3 = 4 k'_0 \left(\frac{a^2}{c^3} T + \frac{a}{c^2} k_1 + 1 \right)^2 + \frac{4 k_2^2}{c^2}.$$

Il existe des constantes $k_4, k_5 > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_t(t, x)| \leq & \left(\frac{a^3}{c} T k'_0 + \frac{a^2}{c} k_4 k'_0 \right) (\|g_0\|_{H^1(0, T)} + \|g_1\|_{H^1(0, T)}) \\ & + \left(1 + \frac{a}{c} k_4 \right) k'_0 (\|g_{0,t}\|_{H^1(0, T)} + \|g_{1,t}\|_{H^1(0, T)}) \\ & + \frac{1}{c} k_5 (|g_{0,tt}(t)| + |g_{1,tt}(t)|) \end{aligned}$$

d'où :

$$(75) \quad \|\tilde{f}_t\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq k_6 (\|g_0\|_{H^2(0, T)}^2 + \|g_1\|_{H^2(0, T)}^2).$$

On obtient aussi :

$$\|\tilde{f}(0)\|_{L^2(0, 1)}^2 \leq k_7 (\|g_0\|_{H^1(0, T)}^2 + \|g_1\|_{H^1(0, T)}^2)$$

(76) et

$$\|\tilde{f}_x(0)\|_{L^2(0, 1)}^2 \leq k_8 (\|g_0\|_{H^2(0, T)}^2 + \|g_1\|_{H^2(0, T)}^2).$$

A l'aide de (73), (74), (75) et (76), on obtient :

$$(77) \quad \|u_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq K' (\|g_0\|_{H^2(0, T)}^2 + \|g_1\|_{H^2(0, T)}^2)$$

avec :

$$K' = (k_3 + k_6 + k_7 + k_8) B_{a, c, T}$$

(K' dépend de a, c, T, k'_0).

- Estimation de $\|\tilde{u}_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}$:

Le calcul explicite de $\tilde{u}_{ttt}$ à partir de (55) montre qu'il existe une constante $K'' > 0$, dépendant de a, c, T, k'_0 , telle que :

$$(77') \quad \|\tilde{u}_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq K'' (\|g_0\|_{H^2(0, T)}^2 + \|g_1\|_{H^2(0, T)}^2).$$

- On obtient, grâce à (77) et (77') :

$$(78) \quad \|u_{ttt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq 2 (K' + K'') (\|g_0\|_{H^2(0, T)}^2 + \|g_1\|_{H^2(0, T)}^2).$$

B.2.5. Conclusion :

On considère l'espace E des fonctions u telles que :

$$u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, u_{xxt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$u_{ttt}, u_{xtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)).$$

On le munit de la norme $\|\cdot\|_E$ définie de façon naturelle comme les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_1}$. E muni de la norme $\|\cdot\|_E$ est un espace de Banach.

La solution u définie au théorème 4 appartient à $\mathcal{E}_1$ donc à E et les estimations (64), (69), (72) et (78) peuvent se résumer en une estimation :

(79)

$$\|u\|_E^2 \leq K_{a,c,T,k_o,k'_o} \left(\|g_o\|_{H^2(0,T)}^2 + \|g_1\|_{H^2(0,T)}^2 \right),$$

avec $K > 0$ (K peut être calculée à l'aide des expressions de C_1, C_2, C_3, K' et K'').

- CHAPITRE III -

ETUDE DU PROBLEME $P(\gamma, b)$
=====

A) Un théorème d'existence et d'unicité pour le problème $P(0, b)$

THEOREME 5 :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs.

Il existe une suite $\mathcal{Y} = \{b_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de nombres réels telle que, si $b \notin \mathcal{Y}$, si $f \in L^2(0, T ; L^2(0, 1))$, $u_0 \in H^2(0, 1)$, $u_1 \in H^1(0, 1)$, $\varphi_0, \varphi_1 \in H^1(0, T)$, alors il existe un unique $u \in L^\infty(0, T ; L^2(0, 1))$, avec :

$$u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx} \in L^\infty(0, T ; L^2(0, 1)),$$

$$u_{tt}, u_{xxt} \in L^2(0, T ; L^2(0, 1)),$$

et vérifiant :

(i) pour presque tout $x \in (0, 1)$: $u(0, x) = u_0(x)$

et

$$u_t(0, x) = u_1(x) ;$$

(ii) pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$-a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) = b u(t, 0) + \varphi_0(t),$$

$$+a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) = b u(t, 1) + \varphi_1(t) ;$$

(iii) au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} = f.$$

On démontre ce théorème à l'aide des théorèmes 3 et 4 et à l'aide du théorème de l'alternative de Fredholm.

A. 1. Application du théorème de l'alternative de Fredholm :

a, c et T sont fixés.

Le théorème 4 montre que pour tout $g = (g_0, g_1) \in Y = H^2(0, T) \times H^2(0, T)$ il existe un unique $u \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, avec :

$$u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, u_{xtt}, u_{xxt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$u_{ttt}, u_{xxtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)), \text{ et vérifiant :}$$

$$\cdot \text{ pour presque tout } x \in (0, 1) : u(0, x) = 0$$

(80)

et

$$u_t(0, x) = 0 ;$$

$$\cdot \text{ pour presque tout } t \in (0, T) :$$

$$-a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) = g_0(t) - g_0(0),$$

(81)_g

$$+a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) = g_1(t) - g_1(0) ;$$

$$\cdot \text{ au sens des distributions de } \mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[) \text{ et pour presque tout } (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) :$$

(82)

$$u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} = 0.$$

On vérifie de plus que $u(t, 0)$ et $u(t, 1)$ sont définis et appartiennent à $H^2(0, T)$:

$$u \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \text{ donc } u \in L^2(0, T; C([0, 1])),$$

$$\text{et donc } u(t, 0) \in L^2(0, T), \quad u(t, 1) \in L^2(0, T) ;$$

$$\text{de même : } u_t \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \text{ donc } u_t(t, 0), u_t(t, 1) \in L^2(0, T),$$

$$\text{et : } u_{tt} \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \text{ donc } u_{tt}(t, 0), u_{tt}(t, 1) \in L^2(0, T).$$

Ceci permet de définir une application :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : Y &\longrightarrow Y \\ g &\longmapsto (u(t, 0), u(t, 1)), \end{aligned}$$

où u est l'unique fonction appartenant à $\mathcal{E}_1$ satisfaisant (80), (81)_g et (82).

$\mathcal{C}$ est une application linéaire car c'est la composée d'applications linéaires (l'application $g \in Y \mapsto u \in \mathcal{E}_1$ est linéaire grâce à la linéarité des équations (80), (81)_g et (82) et grâce à l'unicité démontrée dans le théorème 4).

Pour démontrer le théorème 5, on commence par démontrer que, pour tout $\Phi \in Y$, il existe $g \in Y$ vérifiant :

$$b\mathcal{C}g + \Phi = g$$

(ce sera possible pour b convenablement choisi en un sens qu'on précisera).

A.1.1, $\mathcal{C}$ est compacte :

- L'application $Y \longrightarrow E$ (l'espace E a été défini au chapitre précédent)
 $g \longmapsto u,$

où u est la solution appartenant à $\mathcal{E}_1$ (donc à E), de (80), (81)_g et (82), est linéaire continue : la continuité résulte de l'estimation (obtenue à partir de (79)) :

$$(83) \quad \|u\|_E^2 \leq K \left(\|g_1 - g_1(0)\|_{H^2(0,T)}^2 + \|g_0 - g_0(0)\|_{H^2(0,T)}^2 \right).$$

L'application $E \longrightarrow Y$ est linéaire continue.
 $u \longmapsto (u(t,0), u(t,1))$

En effet l'application trace $\text{Tr} : L^2(0,T; H^1(\Omega)) \longrightarrow L^2(0,T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ est linéaire continue, et ici $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ n'est autre que $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{C}$ est donc linéaire continue.

- Pour démontrer que $\mathcal{C}$ est compacte, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ transforme une suite faiblement convergente dans Y en une suite dont on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans Y [13].

Or on sait que, si $v, v_t, v_x \in L^2(Q)$, $Q =]0, T[\times]0, 1[$, alors $v \in H^1(Q)$ et donc $v(t, 0) \in H^{\frac{1}{2}}(0, T)$, $v(t, 1) \in H^{\frac{1}{2}}(0, T)$, l'application $v \mapsto v(t, 0), H^1(Q) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(0, T)$ étant continue ; et de plus l'injection :

$$H^{\frac{1}{2}}(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T)$$

est compacte [11].

Soit donc $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers g dans Y . On désigne par $u^{(n)}$ (resp. u) la solution de (80), (81) _{g_n} (resp. (81) _{g}) et (82) appartenant à $\mathcal{E}_1$, donc à E . Ainsi :

. $u^{(n)}, u_t^{(n)}, u_x^{(n)} \in L^2(Q)$, donc $u^{(n)} \in H^1(Q)$. De plus $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans Y , donc (83) montre que $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(Q)$, et $\{u^{(n)}(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites bornées dans $H^{\frac{1}{2}}(0, T)$. Grâce à l'injection compacte de $H^{\frac{1}{2}}(0, T)$ dans $L^2(0, T)$, on peut donc (quitte à extraire une sous-suite de la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) supposer que $\{u^{(n)}(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent fortement dans $L^2(0, T)$ et elles convergeront fortement vers $u(t, 0)$ et $u(t, 1)$ respectivement, puisque $\mathcal{G}$ est linéaire continue pour la topologie forte de Y , donc continue pour la topologie faible de Y et donc $\{u^n(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent faiblement vers $u(t, 0)$ et $u(t, 1)$ respectivement.

. $u_t^{(n)}, u_{tt}^{(n)}, u_{xt}^{(n)} \in L^2(Q)$ et (83) montre que $\{u_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(Q)$. On démontre donc de la même façon qu'on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite de la suite $\{u_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$) que $\{u_t^{(n)}(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u_t^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent fortement dans $L^2(0, T)$ vers $u_t(t, 0)$ et $u_t(t, 1)$ respectivement.

. $u_{tt}^{(n)}, u_{ttt}^{(n)}, u_{xtt}^{(n)} \in L^2(Q)$ et (83) montre que $\{u_{tt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(Q)$. D'où : (à une extraction de sous-suite près) $\{u_{tt}^{(n)}(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u_{tt}^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent fortement dans $L^2(0, T)$ vers $u_{tt}(t, 0)$ et $u_{tt}(t, 1)$ respectivement.

$\mathcal{C}$ est donc compacte.

A.1.2.

Le théorème de l'alternative de Fredholm [14] permet alors de conclure :

L'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{C}$ est au plus dénombrable et n'a pas de point d'accumulation sauf peut-être 0. Soit $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des valeurs propres non nulles de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{Y} = \{\frac{1}{\lambda_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors pour tout $b \notin \mathcal{Y}$ et pour tout $\Phi \in Y$, il existe g unique, $g \in Y$, tel que :

$$\frac{1}{b} g - \mathcal{C} g = \frac{1}{b} \Phi.$$

On peut donc démontrer la proposition suivante :

A.2. Proposition :

Soient a, c, T trois nombres réels strictement positifs et $\mathcal{Y}$ la suite de réels définie ci-dessus.

Pour tout $b \notin \mathcal{Y}$ et pour tous Φ_0, Φ_1 dans $H^2(0, T)$, il existe un unique u appartenant à $\mathcal{E}_1$ (donc à E) et vérifiant (80), (82) et :

pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$(84) \quad \begin{aligned} -a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) &= b u(t, 0) + \Phi_0(t) - \Phi_0(0), \\ +a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) &= b u(t, 1) + \Phi_1(t) - \Phi_1(0). \end{aligned}$$

En effet, soit $b \notin \mathcal{Y}$, Φ_0 et Φ_1 étant donnés, on considère $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1) \in Y$, d'où $g \in Y$ tel que $g = b \mathcal{C} g + \Phi$. Alors, la solution

$u \in \mathcal{E}_1$ de (80), (81)_g et (82) vérifie (84) car :

$$\begin{aligned} g_0(t) - g_0(0) &= (bu(t, 0) + \Phi_0(t)) - (\underbrace{bu(0, 0) + \Phi_0(0)}_{= 0, \text{ grâce à (80) et parce}} \\ &\quad \text{que } u \in \mathcal{C}([0, T] \times [0, 1]) \end{aligned}$$

et de même :

$$g_1(t) - g_1(0) = bu(t, 1) + \Phi_1(t) - \Phi_1(0).$$

L'existence de u est donc démontrée.

Unicité : Soient u_1 et u_2 deux solutions appartenant à $\mathcal{E}_1$.

On pose :

$$u = u_1 - u_2.$$

Alors u appartient à $\mathcal{E}_1$ et u vérifie (80), (82) et

$$\begin{aligned} (84') \quad & -au_x(t, 0) - cu_{xt}(t, 0) = bu(t, 0) \\ & +au_x(t, 1) + cu_{xt}(t, 1) = bu(t, 1). \end{aligned}$$

Multipliant (82) par u_t et intégrant sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$, on obtient, compte tenu de (84') :

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_t dx dt + a \int_0^s \int_0^1 u_x u_{xt} dx dt + c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \\ = \int_0^s (bu(t, 1) u_t(t, 1) + bu(t, 0) u_t(t, 0)) dt. \end{aligned}$$

Compte tenu de (80), cela s'écrit :

$$\begin{aligned} (85) \quad & \|u_t(s)\|_{L^2(0, 1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0, 1)}^2 + 2c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \\ & = 2 \int_0^s (bu(t, 1) u_t(t, 1) + bu(t, 0) u_t(t, 0)) dt. \end{aligned}$$

Et on peut écrire les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |2 \int_0^s bu(t, 1) u_t(t, 1) dt| &\leq \int_0^s 2 k_0 \|bu(t)\|_{H^1(0, 1)} k_0 \|u_t(t)\|_{H^1(0, 1)} dt \\ &\leq k_0^2 b^2 \alpha^2 \int_0^s \|u(t)\|_{H^1(0, 1)}^2 dt + \frac{k_0^2}{\alpha^2} \int_0^s \|u_t(t)\|_{H^1(0, 1)}^2 dt \\ &\quad (\alpha > 0) \end{aligned}$$

avec, d'après (16) et (80) :

$$(86) \quad \|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq 2 T \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \leq 2 T \int_0^s \|u_t(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau$$

(pour $0 \leq t \leq s \leq T$)

donc :

$$(86') \quad \int_0^s \|u(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt \leq 2 T^2 \int_0^s \|u_t(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau.$$

On obtient à partir de (85) :

$$(87) \quad \begin{aligned} & \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \\ & \leq 2 k_o^2 b^2 \alpha^2 \int_0^s \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt + \left(4 T^2 k_o^2 b^2 \alpha^2 + \frac{2 k_o^2}{\alpha} \right) \int_0^s \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt \\ & \quad + \frac{2 k_o^2}{\alpha^2} \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt. \end{aligned}$$

On choisit à présent α tel que $\frac{2 k_o^2}{\alpha^2} = c$, et on pose :

$$a' = \inf(1, a), \quad A' = \sup\left(2 k_o^2 b^2 \alpha^2, 4 T^2 k_o^2 b^2 \alpha^2 + c\right).$$

On déduit alors de (87) :

$$\|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{A'}{a'} \int_0^s \left(\|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \right) dt.$$

Et il résulte du lemme de Gronwall que l'on a :

$$\|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0 \quad \text{pour presque tout } s \in (0, T),$$

d'où, grâce à (86) :

$$\|u(s)\|_{L^2(0,1)}^2 = 0 \quad \text{pour presque tout } s \in (0, T),$$

d'où :

$$u(s, x) = 0 \quad \text{pour presque tout } (s, x) \in (0, T) \times (0, 1).$$

L'unicité est donc démontrée.

On complète la proposition ci-dessus en établissant une estimation de la norme de u dans l'espace $\mathcal{E}_2$:

$\mathcal{E}_2 = \{u \in \mathcal{E}, u_{xtt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1))\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_2}$ définie par :

$$\|u\|_{\mathcal{E}_2}^2 = \|u\|_{\mathcal{E}}^2 + \|u_{xtt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2.$$

Lemme :

Soient $b \notin \mathcal{Y}$ et u la fonction appartenant à $\mathcal{E}_1$ et vérifiant (80), (82), (84).

Il existe une constante $D > 0$, dépendant de a, c, T, k_0, k'_0 et b , telle que :

$$(88) \quad \|u\|_{\mathcal{E}_2}^2 \leq D \left(\|\Phi_0\|_{H^1(0, T)}^2 + \|\Phi_1\|_{H^1(0, T)}^2 \right).$$

Démonstration du lemme : Les calculs qui suivent sont justifiés grâce à la régularité connue pour $u : u \in \mathcal{E}_1$.

A.2.1. On multiplie (82) par u_t et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$. On obtient, compte tenu de (84) :

$$\int_0^s \int_0^1 u_{tt} u_t dx dt + \int_0^s \int_0^1 (a u_x + c u_{xt}) u_{xt} dx dt =$$

$$\int_0^s \left[(b u(t, 1) + \Phi_1(t) - \Phi_1(0)) u_t(t, 1) + (b u(t, 0) + \Phi_0(t) - \Phi_0(0)) u_t(t, 0) \right] dt$$

d'où, grâce à (80) :

$$(89) \quad \|u_t(s)\|_{L^2(0, 1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0, 1)}^2 + 2c \int_0^s \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt =$$

$$2 \int_0^s \left[(b u(t, 1) + \Phi_1(t) - \Phi_1(0)) u_t(t, 1) + (b u(t, 0) + \Phi_0(t) - \Phi_0(0)) u_t(t, 0) \right] dt.$$

Et on peut écrire la suite d'inégalités suivante :

$$|2 \int_0^s (b u(t, 1) + \Phi_1(t) - \Phi_1(0)) u_t(t, 1) dt|$$

$$\leq \int_0^s 2 |b u(t, 1) u_t(t, 1)| dt + \int_0^s 2 |(\Phi_1(t) - \Phi_1(0)) u_t(t, 1)| dt$$

$$\leq \int_0^s 2 k_0 \alpha \|b u(t)\|_{H^1(0, 1)} \frac{k_0}{\alpha} \|u_t(t)\|_{H^1(0, 1)} dt$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^S 2 \left(2 k'_0 \alpha \|\Phi_1\|_{H^1(0,T)} \right) \frac{k_0}{\alpha} \|u_t(t)\|_{H^1(0,1)}^2 dt \quad (\alpha > 0) \\
 & \leq k_0^2 \alpha^2 b^2 \int_0^S \|u(t)\|_{H^1(0,1)}^2 dt + 4 k_0'^2 \alpha^2 \int_0^S \|\Phi_1\|_{H^1(0,T)}^2 dt \\
 & \quad + \frac{2 k_0^2}{\alpha^2} \int_0^S \|u_t(t)\|_{H^1(0,1)}^2 dt.
 \end{aligned}$$

D'où, à partir de (89), et après avoir choisi α tel que

$$\frac{4 k_0^2}{\alpha^2} = c :$$

$$\begin{aligned}
 & \|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^S \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt \\
 (90) \quad & \leq 4 k_0'^2 \alpha^2 T \left(\|\Phi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\Phi_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right) + \frac{4 k_0^2}{\alpha^2} \int_0^S \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt \\
 & \quad + 2 k_0^2 \alpha^2 b^2 \int_0^S \|u(t)\|_{H^1(0,1)}^2 dt.
 \end{aligned}$$

A partir de (86') et (90) on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^S \int_0^1 u_{xt}^2 dx dt}{\leq D_1 + A_1 \int_0^S \left(\|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_x(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \right) dt}
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 & D_1 = 4 k_0'^2 \alpha^2 T \left(\|\Phi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\Phi_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right), \\
 & A_1 = \sup \left(2 k_0^2 \alpha^2 b^2, 4 T^2 k_0^2 \alpha^2 b^2 + c \right).
 \end{aligned}$$

Il résulte alors du lemme de Gronwall que l'on a :

(91)

$$\|u_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{D_1}{a^1} e^{\frac{A_1}{a^1} T}$$

pour presque tout $s \in [0, T]$.

A.2.2. On dérive (82) en t , puis on multiplie par u_{tt} et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$. On dérive, de plus, (84) en t , ce qui est loisible parce que :

$$u_x \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \quad , \quad \text{donc } u_x(t, 0) \in L^2(0, T);$$

$$u_{xt} \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) \quad , \quad \text{donc } u_{xt}(t, 0) \in L^2(0, T).$$

Donc $u_x(t, 0)$ et $u_x(t, 1)$ appartiennent à $H^1(0, T)$.

De même : u_{xt}, u_{xtt} appartiennent à $L^2(0, T; H^1(0, 1))$, donc

$u_{xt}(t, 0)$ et $u_{xt}(t, 1)$ appartiennent à $H^1(0, T)$.

On obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^s \int_0^1 u_{ttt} u_{tt} dx dt + \int_0^s \int_0^1 (a u_{xt} + c u_{xtt}) u_{xtt} dx dt \\ (92) \quad & = \int_0^s [(b u_t(t, 1) + \Phi_{1,t}(t)) u_{tt}(t, 1) + (b u_t(t, 0) + \Phi_{0,t}(t)) u_{tt}(t, 0)] dt. \end{aligned}$$

Et on remarque, grâce à (80), que l'on a :

$$u_{tt}(0) = 0.$$

De plus :

$$\begin{aligned} & |2 \int_0^s (b u_t(t, 1) + \Phi_{1,t}(t)) u_{tt}(t, 1) dt| \\ & \leq \int_0^s 2 |b u_t(t, 1) u_{tt}(t, 1)| dt + \int_0^s 2 |\Phi_{1,t}(t) u_{tt}(t, 1)| dt \\ & \leq k_o^2 \alpha^2 b^2 \int_0^s \|u_t(t)\|_{H^1(0,1)}^2 dt + \alpha^2 \int_0^s |\Phi_{1,t}(t)|^2 dt \\ & \quad + \frac{2 k_o^2}{\alpha^2} \int_0^s \|u_{tt}(t)\|_{H^1(0,1)}^2 dt \end{aligned}$$

($\alpha > 0$)

avec :

$$\int_0^s \|u_t(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt \leq 2 T^2 \int_0^s \|u_{tt}(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\tau$$

((86') écrit pour u_t , puisque $u_t(0) = 0$).

D'où, à partir de (92), et après avoir choisi α tel que $\frac{4k_0^2}{\alpha} = c$:

$$\frac{\|u_{tt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + a \|u_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + c \int_0^s \int_0^1 u_{xtt}^2 dx dt}{\leq D_2 + A_1 \int_0^s (\|u_{tt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_{xt}(t)\|_{L^2(0,1)}^2) dt}$$

avec :

$$D_2 = \alpha^2 (\|\Phi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\Phi_1\|_{H^1(0,T)}^2).$$

Il résulte alors du lemme de Gronwall que l'on a :

$$(93) \quad \boxed{\|u_{tt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{D_2}{a^1} e^{\frac{A_1}{a^1} T}},$$

pour presque tout $s \in [0, T]$

et :

$$(94) \quad \boxed{\|u_{xtt}\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \leq \frac{D_2}{c} (e^{\frac{A_1}{a^1} T} - 1)}.$$

A.2.3. On multiplie (82) par u_{xx} et on intègre sur $(0, s) \times (0, 1)$, avec $s \in [0, T]$. On obtient (cf. chapitre précédent, paragraphe B.2.3.) :

$$2 a \int_0^s \int_0^1 u_{xx}^2 dx dt + c \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \int_0^s \int_0^1 u_{tt}^2 dx dt + \int_0^s \int_0^1 u_{xx}^2 dx dt ;$$

d'où, grâce à (93) :

$$\frac{c \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2}{c} \leq D_3 + \int_0^s \|u_{xx}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 dt$$

avec :

$$D_3 = \frac{D_2}{A_1} \left(e^{\frac{A_1}{a} T} - 1 \right).$$

Il résulte alors du lemme de Gronwall que l'on a :

(95)

$$\|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \frac{D_3}{c} e^{\frac{1}{c} T}$$

pour presque tout $s \in [0, T]$.

A.2.4. Conclusion :

Les estimations (91), (93) et (94) permettent de démontrer le lemme :

en effet, on obtient à l'aide de (86) et (91) une estimation de

$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))}$ de la forme :

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq D_4 \left(\|\Phi_0\|_{H^1(0, T)}^2 + \|\Phi_1\|_{H^1(0, T)}^2 \right)$$

où D_4 est une constante > 0 dépendant de a, c, T, k_0, k'_0 et b .

Et on obtient à l'aide de (82), (93), (95) une estimation de

$\|u_{xxt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}$ de la même forme.

D'où la majoration de $\|u\|_{\mathcal{E}_2}$ annoncée.

A.3. Conséquence du lemme :

On démontre la proposition suivante :

PROPOSITION :

Pour tout b n'appartenant pas à $\mathcal{V}$ et pour tous Φ_0, Φ_1 appartenant à $H^1(0, T)$, il existe un unique u appartenant à $\mathcal{E}_2$ et vérifiant (80), (82) et (84).

Les hypothèses de cette proposition ne diffèrent de celles de la proposition précédente que par l'hypothèse $\Phi_0, \Phi_1 \in H^1(0, T)$ (au lieu de $\Phi_0, \Phi_1 \in H^2(0, T)$). Aussi obtient-on l'existence et l'unicité d'une solution dans $\mathcal{E}_2$ et non plus dans $\mathcal{E}_1$.

Démonstration : soit $b \notin \mathcal{V}$.

$H^2(0, T)$ est dense dans $H^1(0, T)$. Soient donc $\{\Phi_0^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\Phi_1^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $H^2(0, T)$ telles que :

$$\Phi_0 = H^1(0, T) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_0^{(n)}, \quad \Phi_1 = H^1(0, T) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_1^{(n)}.$$

On note $u^{(n)} \in \mathcal{E}_1$ la fonction satisfaisant (80), (82) et (84)_n :

$$(84)_n \quad \begin{aligned} -a u_x^{(n)}(t, 0) - c u_{xt}^{(n)}(t, 0) &= b u^{(n)}(t, 0) + \Phi_0^{(n)}(t) - \Phi_0^{(n)}(0), \\ +a u_x^{(n)}(t, 1) + c u_{xt}^{(n)}(t, 1) &= b u^{(n)}(t, 1) + \Phi_1^{(n)}(t) - \Phi_1^{(n)}(0) \end{aligned}$$

(l'existence de $u^{(n)}$, et l'unicité, sont assurées par la proposition précédente).

On aura de plus, d'après le lemme :

$$(88)_n \quad \|u^{(n)}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq D \left(\|\Phi_0^{(n)}\|_{H^1(0, T)}^2 + \|\Phi_1^{(n)}\|_{H^1(0, T)}^2 \right).$$

Or les suites $\{\Phi_i^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $i = 0, 1$, convergent dans $H^1(0, T)$ donc sont bornées dans $H^1(0, T)$. L'estimation (88)_n prouve alors que la suite $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{E}$.

On utilise alors le théorème d'Alaoglu (si X est un espace de Banach réel et X' son dual topologique, les sous-ensembles de X' qui

sont bornés pour la topologie forte sont relativement compacts pour la topologie $\sigma(X', X)$:

Il existe $u, u_1, u_2, v, v_1 \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, il existe $v_2, w, w_1 \in L^2(0, T; L^2(0, 1))$, et il existe une sous-suite de la sous-suite $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, - qu'on notera encore $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ -, vérifiant :

$$(96) \quad \begin{aligned} u &= \sigma(L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), L^1(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u^{(n)}, \\ u_1 &= \sigma(L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), L^1(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_x^{(n)}, \\ u_2 &= \sigma(L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), L^1(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{xx}^{(n)}, \end{aligned}$$

$$(97) \quad \begin{aligned} v &= \sigma(L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), L^1(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_t^{(n)}, \\ v_1 &= \sigma(L^\infty(0, T; L^2(0, 1)), L^1(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{xt}^{(n)}, \\ v_2 &= \sigma(L^2(0, T; L^2(0, 1)), L^2(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{xxt}^{(n)}, \\ w &= \sigma(L^2(0, T; L^2(0, 1)), L^2(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{tt}^{(n)}, \\ w_1 &= \sigma(L^2(0, T; L^2(0, 1)), L^2(0, T; L^2(0, 1))) - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{xtt}^{(n)}. \end{aligned}$$

Nécessairement les suites $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$\{u_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{xt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{xxt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{tt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u_{xtt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$

convergent dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times]0, 1[)$ vers $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2, w$ et w_1 respectivement, en même temps que vers $u, u_x, u_{xx}, u_t, u_{xt}, u_{xxt}, u_{tt}$ et u_{xtt} respectivement. La topologie de $\mathcal{D}'(]0, T[\times]0, 1[)$ étant séparée, on démontre donc qu'on a :

$$(98) \quad \begin{aligned} u_1 &= u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \\ v &= u_t, \quad v_1 = u_{xt}, \quad v_2 = u_{xxt}, \\ w &= u_{tt}, \quad w_1 = u_{xtt}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u \in \mathcal{E}_2.$$

Et on démontre que u vérifie (80), (82) et (84) :

Grâce à (96), (97) et (98) il est clair que u vérifie (82).

De plus la suite $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$,

la suite $\{u_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$, et

l'injection $H^1(0, 1) \hookrightarrow L^2(0, 1)$ étant compacte, un lemme de convergence uniforme de Lions [10] permet de supposer, quitte à extraire

une sous-suite de la suite $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, que cette suite converge vers u

dans $C([0, T]; L^2(0, 1))$. On en déduit que $\{u^{(n)}(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge

vers $u(0)$ dans $L^2(0, 1)$. Or $u^{(n)}$ satisfait (80). Donc :

$$\text{pour presque tout } x \in (0, 1), \quad u(0, x) = 0.$$

On montre de même :

$$\text{pour presque tout } x \in (0, 1), \quad u_t(0, x) = 0,$$

car les suites $\{u_t^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u_{tt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées respectivement

dans $L^2(0, T; H^1(0, 1))$ et $L^2(0, T; L^2(0, 1))$.

Il reste à démontrer que u vérifie (84) :

. (96), (98) permettent de montrer, par un raisonnement tout à fait analogue à celui de la page 56 et qui repose sur la compacité de l'injection :

$$H^{\frac{1}{2}}(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T),$$

que (quitte à extraire une sous-suite de la suite $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$) on peut

supposer que $\{u^{(n)}(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent fortement

dans $L^2(0, T)$ vers $u(t, 0)$ et $u(t, 1)$ respectivement.

. de même, vu que $\{u_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{xt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ conver-

gent faiblement vers u_x , u_{xt} , u_{xx} respectivement dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$,

on peut supposer (à une extraction de sous-suite près) que $\{u_x^{(n)}(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$

et $\{u_x^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent fortement dans $L^2(0, T)$ vers $u_x(t, 0)$ et

et $u_x(t, 1)$ respectivement.

. et $\{u_{xt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{xtt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{u_{xxt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent faiblement vers u_{xt} , u_{xtt} , u_{xxt} respectivement dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$, donc on peut supposer (à une extraction de sous-suite près) que $\{u_{xt}^{(n)}(t, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{u_{xt}^{(n)}(t, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent fortement dans $L^2(0, T)$ vers $u_{xt}(t, 0)$ et $u_{xt}(t, 1)$ respectivement.

Comme $u^{(n)}$ vérifie (84)_n, on déduit finalement que u vérifie (84). L'existence de $u \in \mathcal{E}_2$ vérifiant (80) (82) et (84) est donc démontrée.

L'unicité de cette solution u se démontre exactement comme l'unicité démontrée à la proposition ci-dessus (paragraphe A.2.), les mêmes calculs étant justifiés lorsque u appartient à $\mathcal{E}_2$.

Remarque :

On sait que si X est un espace de Banach réel et X' son dual topologique, si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X' qui converge vers x dans X' muni de la topologie $\sigma(X', X)$, [5] :

$$x \in X', \quad x = \sigma(X', X) - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n,$$

alors :

$$\|x\|_{X'} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|_{X'};$$

et on sait que si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X qui converge fortement vers y dans X , alors :

$$\|y\|_X = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n\|_X.$$

On déduit donc de (88)_n par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ que u satisfait (88) :

$$\|u\|_{\mathcal{E}_2}^2 \leq D \left(\|\Phi_0\|_{H^1(0, T)}^2 + \|\Phi_1\|_{H^1(0, T)}^2 \right).$$

A. 4. Démonstration du théorème 5 :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs et b n'appartenant pas à l'ensemble $\mathcal{G}$ défini au paragraphe A. 1. 2.

Soient f dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$, u_0 dans $H^2(0, 1)$, u_1 dans $H^1(0, 1)$, φ_0 et φ_1 dans $H^1(0, T)$.

- On définit h_0 et h_1 en posant :

$$h_0 = bu_0(0) + \varphi_0(0) \quad , \quad h_1 = bu_0(1) + \varphi_1(0)$$

h_0 et h_1 sont des constantes, donc appartiennent à $H^1(0, T)$.

Le théorème 3 assure alors l'existence d'une fonction $\bar{u}$ appartenant à $\mathcal{E}$ et vérifiant :

. pour presque tout $x \in (0, 1)$: $\bar{u}(0, x) = u_0(x)$, $\bar{u}_t(0, x) = u_1(x)$;

. pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$-a\bar{u}_x(t, 0) - c\bar{u}_{xt}(t, 0) = h_0 ,$$

$$+a\bar{u}_x(t, 1) + c\bar{u}_{xt}(t, 1) = h_1 ;$$

. au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$\bar{u}_{tt} - a\bar{u}_{xx} - c\bar{u}_{xxt} = f .$$

- On définit alors deux éléments Φ_0 et Φ_1 de $H^1(0, T)$ en posant :

$$\Phi_0(t) = b\bar{u}(t, 0) + \varphi_0(t) \quad , \quad \Phi_1(t) = b\bar{u}(t, 1) + \varphi_1(t) .$$

Φ_0 et Φ_1 appartiennent à $H^1(0, T)$ car φ_0 , φ_1 appartiennent à $H^1(0, T)$ par hypothèse, et on vérifie que $\bar{u}(t, 0)$, $\bar{u}(t, 1)$ appartiennent aussi à $H^1(0, T)$:

$$\bar{u} \in \mathcal{E} \quad \text{donc} \quad \bar{u}, \bar{u}_t \in L^2(0, T; H^1(0, 1)) , \quad \text{donc} :$$

$$\bar{u}, \bar{u}_t \in L^2(0, T; C([0, 1])) ,$$

et donc :

$$\bar{u}(t, 0), \bar{u}(t, 1), \bar{u}_t(t, 0), \bar{u}_t(t, 1) \in L^2(0, T) .$$

La proposition démontrée au paragraphe A.3. ci-dessus assure alors l'existence d'une fonction $\hat{u}$ appartenant à $\mathcal{E}_2$, donc à $\mathcal{E}$, et vérifiant (80), (82) et (84), c'est-à-dire

. pour presque tout $x \in (0, 1)$: $\hat{u}(0, x) = 0$, $\hat{u}_t(0, x) = 0$;

. pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$-a \hat{u}_x(t, 0) - c \hat{u}_{xt}(t, 0) = b \hat{u}(t, 0) + b \bar{u}(t, 0) + \varphi_0(t) - b \bar{u}(0, 0) - \varphi_0(0),$$

$$+a \hat{u}_x(t, 1) + c \hat{u}_{xt}(t, 1) = b \hat{u}(t, 1) + b \bar{u}(t, 1) + \varphi_1(t) - b \bar{u}(0, 1) - \varphi_1(0) ;$$

. au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$\hat{u}_{tt} - a \hat{u}_{xx} - c \hat{u}_{xxt} = 0.$$

- On considère la fonction $u = \bar{u} + \hat{u}$. Cette fonction appartient à $\mathcal{E}$, elle vérifie (i) et (iii) du théorème 5. De plus :

pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$-a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) = b u(t, 0) + \varphi_0(t)$$

$$+a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) = b u(t, 1) + \varphi_1(t),$$

car :

$$b \bar{u}(0, 0) + \varphi_0(0) = b u_0(0) + \varphi_0(0), \quad b \bar{u}(0, 1) + \varphi_1(0) = b u_0(1) + \varphi_1(0).$$

Ceci démontre l'existence de u dans $\mathcal{E}$ vérifiant (i) (ii) et (iii) du théorème 5.

L'unicité de la solution se démontre comme l'unicité démontrée à la proposition du paragraphe A.2. car les calculs restent justifiés lorsque u appartient à $\mathcal{E}$.

Le théorème 5 se trouve donc démontré.

Et on peut le compléter en établissant une estimation de $\|u\|_{\mathcal{E}}$ (u désignant la solution du problème $P(0, b)$ au sens du théorème 5) :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq (\|\bar{u}\|_{\mathcal{E}} + \|\hat{u}\|_{\mathcal{E}})^2 \\ &\leq 2 \|\bar{u}\|_{\mathcal{E}}^2 + 2 \|\hat{u}\|_{\mathcal{E}_2}^2, \end{aligned}$$

avec :

$$(99) \quad \|\bar{u}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq C_{a, c, T} \left(\|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + T h_0^2 + T h_1^2 + \|f\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right)$$

d'après (54),

et :

$$(100) \quad \|\hat{u}\|_{\mathcal{E}_2}^2 \leq D \left(\|\Phi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\Phi_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right)$$

d'après (88).

Et on peut écrire, compte tenu de la définition de h_0 , h_1 , Φ_0 , Φ_1 :

$$(101) \quad \begin{aligned} h_0^2 &\leq 2 b^2 (u_0(0))^2 + 2 (\varphi_0(0))^2 \\ &\leq 2 b^2 k_o^2 \|u_0\|_{H^1(0,1)}^2 + 2 k_o'^2 \|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2, \\ h_1^2 &\leq 2 b^2 k_o^2 \|u_0\|_{H^1(0,1)}^2 + 2 k_o'^2 \|\varphi_1\|_{H^1(0,T)}^2, \\ \|\Phi_0\|_{H^1(0,T)}^2 &\leq 2 b^2 \|\bar{u}(t,0)\|_{H^1(0,T)}^2 + 2 \|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2, \end{aligned}$$

avec :

$$|\bar{u}(t,0)|^2 \leq k_o^2 \|\bar{u}(t)\|_{H^1(0,1)}^2,$$

$$\text{donc : } \|\bar{u}(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)}^2 \leq k_o^2 \|\bar{u}\|_{L^2(0,T; H^1(0,1))}^2$$

donc :

$$(102) \quad \begin{aligned} \|\Phi_0\|_{H^1(0,T)}^2 &\leq 2 b^2 k_o^2 \left(\|\bar{u}\|_{L^2(0,T; H^1(0,1))}^2 + \|\bar{u}_t\|_{L^2(0,T; H^1(0,1))}^2 \right) \\ &\quad + 2 \|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2 \\ &\leq 2 b^2 k_o^2 T \|\bar{u}\|_{\mathcal{E}}^2 + 2 \|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2. \end{aligned}$$

De même :

$$(103) \quad \|\Phi_1\|_{H^1(0,T)}^2 \leq 2 b^2 k_o^2 T \|\bar{u}\|_{\mathcal{E}}^2 + 2 \|\varphi_1\|_{H^1(0,T)}^2.$$

De (99) et (101) on déduit :

$$(104) \quad \|\bar{u}\|_{\mathcal{E}}^2 \leq D' \left(\|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\varphi_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right)$$

où :

$$D' = C_{a,c,T} \sup \left(1 + 4 b^2 k_o^2 T, 2 k_o'^2 T \right).$$

De (100), (102) et (103) on déduit :

$$(105) \quad \|\hat{u}\|_{\mathcal{E}_2}^2 \leq 2 D \left(2 b^2 k_o^2 T \|\bar{u}\|_{\mathcal{E}}^2 + \|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\varphi_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right).$$

D'où, à partir de (104) et (105) :

$$(106) \quad \|u\|_{\mathcal{E}}^2 \leq 2 \left(1 + 4 D b^2 k_o^2 T \right) \|\bar{u}\|_{\mathcal{E}}^2 + 4 D \left(\|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\varphi_1\|_{H^1(0,T)}^2 \right).$$

Et finalement (104) et (106) permettent d'obtenir :

(107)

$$\|u\|_{\mathcal{E}}^2 \leq D'' \left(\|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + \|\varphi_0\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\varphi_1\|_{H^1(0,T)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T; L^2(0,1))}^2 \right)$$

avec :

$$D'' = 2 \left(1 + 4 D b^2 k_o^2 T \right) D' + 4 D,$$

constante strictement positive qui dépend de a, c, T, k_o, k_o' et b .

B) Un corollaire du théorème 5

COROLLAIRE :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs.

Il existe une suite $\mathcal{G}$ de nombres réels telle que, pour tout b n'appartenant pas à $\mathcal{G}$, pour tous γ dans $\mathbb{R}$, u_0 dans $H^2(0,1)$, u_1 dans $H^1(0,1)$, φ dans $H^1(0,T)$ et w dans $\mathfrak{X}$,

$$\mathfrak{X} = \{w \in L^2(0,T; L^2(0,1)) ; w_x, w_t, w_{xt} \in L^2(0,T; L^2(0,1))\},$$

il existe un unique $u \in L^\infty(0,T; L^2(0,1))$, avec

$$u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx} \in L^\infty(0,T; L^2(0,1)),$$

$$u_{tt}, u_{xxt} \in L^2(0,T; L^2(0,1)),$$

et vérifiant :

$$(i) \quad \text{pour presque tout } x \in (0,1) : u(0,x) = u_0(x),$$

et

$$u_t(0,x) = u_1(x);$$

$$(ii)^w \quad \text{pour presque tout } t \in (0,T) :$$

$$-au_x(t,0) - cu_{xt}(t,0) = bu(t,0) + \varphi(t) + \gamma w(t,0),$$

$$+au_x(t,1) + cu_{xt}(t,1) = bu(t,1) + \varphi(t) - \gamma w(t,1);$$

$$(iii)^w \quad \text{au sens des distributions de } \mathcal{D}'([0,T[\times]0,1[) \text{ et pour presque tout } (t,x) \in (0,T) \times (0,1) :$$

$$u_{tt} - au_{xx} - cu_{xxt} = \gamma w_x.$$

Démonstration de ce corollaire :

a , c , T , $f = \gamma w_x$, u_0 , u_1 , $\varphi_0(t) = \varphi(t) + \gamma w(t,0)$, $\varphi_1(t) = \varphi(t) - \gamma w(t,1)$ satisfont les hypothèses du théorème 5.

On obtient de plus une estimation de $\|u\|_{\mathcal{E}}$ grâce à (107) :

. $\varphi_0(t) = \varphi(t) + \gamma w(t, 0)$, donc :

$$\begin{aligned}
 \|\varphi_0\|_{H^1(0, T)}^2 &\leq 2 \|\varphi\|_{H^1(0, T)}^2 + 2 \gamma^2 \|w(\cdot, 0)\|_{H^1(0, T)}^2 \\
 &\leq 2 \|\varphi\|_{H^1(0, T)}^2 + 2 \gamma^2 k_o^2 \left(\|w\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \|w_t\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}^2 \right) \\
 &\leq 2 \|\varphi\|_{H^1(0, T)}^2 + 2 \gamma^2 k_o^2 \|w\|_{\mathfrak{X}}^2
 \end{aligned}
 \tag{108}$$

(on définit $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ de façon naturelle par :

$$\|w\|_{\mathfrak{X}}^2 = \|w\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}^2 + \|w_t\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}^2.$$

Muni de cette norme, $\mathfrak{X}$ est un espace de Banach).

. $\varphi_1(t) = \varphi(t) - \gamma w(t, 1)$, donc on obtient la même estimation :

$$\|\varphi_1\|_{H^1(0, T)}^2 \leq 2 \|\varphi\|_{H^1(0, T)}^2 + 2 \gamma^2 k_o^2 \|w\|_{\mathfrak{X}}^2$$

. $f = \gamma w_x$, donc :

$$\|f\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq \gamma^2 \|w\|_{\mathfrak{X}}^2.$$

(107) permet donc d'écrire, compte tenu de (108), (109) et (110) :

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{\mathcal{E}}^2 &\leq D'' \left(\|u_0\|_{H^2(0, 1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0, 1)}^2 + 4 \|\varphi\|_{H^1(0, T)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \gamma^2 (4 k_o^2 + 1) \|w\|_{\mathfrak{X}}^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{111}$$

C) Un théorème d'existence pour le problème $P(\gamma, b)$

THEOREME 6 :

Soient a , c et T trois nombres réels strictement positifs.

Il existe une suite $\mathcal{P} = \{b_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de nombres réels telle que, si $b \notin \mathcal{P}$, si $u_0 \in H^2(0, 1)$, $u_1 \in H^1(0, 1)$, $\varphi \in H^1(0, T)$, alors il existe $\gamma_b > 0$ tel que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$|\gamma| \leq \gamma_b$$

il existe $u \in L^\infty(0, T ; L^2(0, 1))$, avec :

$$u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx} \in L^\infty(0, T ; L^2(0, 1)),$$

$$u_{tt}, u_{xxt} \in L^2(0, T ; L^2(0, 1)),$$

et vérifiant :

$$(i) \quad \text{pour presque tout } x \in (0, 1) : \quad u(0, x) = u_0(x)$$

et

$$u_t(0, x) = u_1(x) ;$$

$$(ii) \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T) :$$

$$-a u_x(t, 0) - c u_{xt}(t, 0) - \gamma u_x^3(t, 0) = b u(t, 0) + \varphi(t),$$

$$+a u_x(t, 1) + c u_{xt}(t, 1) + \gamma u_x^3(t, 1) = b u(t, 1) + \varphi(t) ;$$

$$(iii) \quad \text{au sens des distributions de } \mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[) \text{ et pour presque tout } (t, x) \in (0, T) \times (0, 1) :$$

$$u_{tt} - a u_{xx} - c u_{xxt} - \gamma (u_x^3)_x = 0.$$

On démontre ce théorème à l'aide d'une méthode de point fixe :

- On définit une application $\mathcal{G}$: pour tout $w \in \mathcal{E}$, on pose :

$$g(w) = (u_x)^3,$$

où u est l'unique fonction appartenant à $\mathcal{E}$:

$$u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$u_{tt}, u_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)),$$

et satisfaisant (i), (ii)^w, (iii)^w page 73, dont l'existence et l'unicité sont assurées par le corollaire (paragraphe B) de ce chapitre).

On démontre que $\mathcal{S}$ est une application définie sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans $\mathcal{X}$.

- On démontre qu'il existe dans $\mathcal{X}$ une boule $\mathcal{B}_R$ (convexe faiblement compact) telle que :

$$\mathcal{S}(\mathcal{B}_R) \subset \mathcal{B}_R :$$

c'est possible si γ est suffisamment petit.

- On démontre que le graphe de $\mathcal{S}$ est fermé, lorsque $\mathcal{X}$ est muni de la topologie faible.

- On applique le théorème de Kakutani [6] pour conclure à l'existence pour γ suffisamment petit, d'un point fixe pour $\mathcal{S}$. Et si w est un point fixe de $\mathcal{S}$, la solution u du corollaire, correspondant à ce w , satisfait le théorème.

C. 1. Détermination d'une boule $\mathcal{B}_R$ telle que $\mathcal{S}(\mathcal{B}_R) \subset \mathcal{B}_R$:

On pose :

$$v = \mathcal{S}(w) = (u_x)^3.$$

Il s'agit d'établir des estimations de :

$$\begin{aligned} & \|v\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2, \quad \|v_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2, \quad \|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2, \\ & \text{et} \quad \|v_{xt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2. \end{aligned}$$

On démontrera alors que $\mathcal{S}$ est une application de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}$ et on discutera l'existence d'une boule $\mathcal{B}_R$ telle que $\mathcal{S}(\mathcal{B}_R) \subset \mathcal{B}_R$.

C. 1. 1. Estimation de $\|v\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2$:

$$\|v(s)\|_{L^2(0,1)}^2 = \|u_x(s)\|_{L^6(0,1)}^6.$$

Les injections de $H^1(0,1)$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ et de $\mathcal{C}([0,1])$ dans $L^p(0,1)$ ($p \geq 1$) sont continues. En particulier, pour $p = 6$, l'injection de $H^1(0,1)$ dans $L^6(0,1)$ est continue ; il existe donc $k_o'' > 0$ tel que :

$$\forall h \in H^1(0,1), \quad \|h\|_{L^6(0,1)} \leq k_o'' \|h\|_{H^1(0,1)}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \|v(s)\|_{L^2(0,1)}^2 & \leq (k_o'')^6 \|u_x(s)\|_{H^1(0,1)}^6 = (k_o'')^6 [\|u_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ & \quad + \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2]^3 \end{aligned}$$

donc :

$$\|v(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq (k_o'')^6 \|u\|_{\mathcal{E}}^6, \text{ par définition de la norme } \|\cdot\|_{\mathcal{E}};$$

on obtient donc :

(112)

$$\|v\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \leq (k_o'')^6 T \|u\|_{\mathcal{E}}^6,$$

$\|u\|_{\mathcal{E}}$ étant estimée à l'aide de (111).

C.1.2. Estimation de $\|v_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2$ et $\|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2$:

$$v_x(s) = 3 u_x^2(s) u_{xx}(s).$$

D'une part :

$$\text{pour tout } \psi \in H^1(0,1), \quad \sup_{x \in [0,1]} |\psi(x)| \leq k_o \|\psi\|_{H^1(0,1)},$$

d'autre part :

$$\left. \begin{array}{l} u_x \in L^2(0,T;H^1(0,1)) \\ u_{xt} \in L^2(0,T;H^1(0,1)) \end{array} \right\} \text{ donc } u_x \in \mathcal{C}([0,T];H^1(0,1)),$$

donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \forall t \in [0,T] : |u_x(t,x)|^2 &\leq k_o^2 \sup_{t \in [0,T]} \|u_x(t)\|_{H^1(0,1)}^2 \\ &\leq k_o^2 \|u\|_{\mathcal{E}}^2. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|v_x(s)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq 9 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^4 \|u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq 9 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^6. \end{aligned}$$

D'où :

(113)

$$\|v_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \leq 9 k_o^4 T \|u\|_{\mathcal{E}}^6$$

De même :

$$v_t(s) = 3 u_x^2(s) u_{xt}(s)$$

donc :

$$\begin{aligned} \|v_t(s)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq 9 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^4 \|u_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq 9 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^6 \end{aligned}$$

d'où :

(114)

$$\|v_t\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \leq 9 k_o^4 T \|u\|_{\mathcal{E}}^6$$

C.1.3. Estimation de $\|v_{xt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2$:

$$v_{xt}(s) = 6 u_x u_{xt} u_{xx}(s) + 3 u_x^2 u_{xxt}(s)$$

donc :

$$\begin{aligned} \|v_{xt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 &\leq 2 \|6 u_x u_{xt} u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 + 2 \|3 u_x^2 u_{xxt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq 72 k_o^2 \|u\|_{\mathcal{E}}^2 \|u_{xt} u_{xx}(s)\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\quad + 18 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^4 \|u_{xxt}(s)\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|v_{xt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 &\leq 72 k_o^2 \|u\|_{\mathcal{E}}^2 \|u_{xt} u_{xx}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \\ &\quad + 18 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^4 \|u_{xxt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \end{aligned}$$

. d'une part :

$$\|u_{xxt}\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))}^2 \leq \|u\|_{\mathcal{E}}^2$$

. d'autre part :

$$u_{xt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)), \quad u_{xxt} \in L^2(0, T; L^2(0, 1)),$$

$$\text{donc } u_{xt} \in L^2(0, T; H^1(0, 1)), \quad \text{donc } u_{xt} \in L^2(0, T; L^\infty(0, 1))$$

et

$$u_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)),$$

cela assure qu'on a :

$$(u_{xt} \cdot u_{xx}) \in L^2(0, T; L^2(0, 1)),$$

avec de plus :

$$\begin{aligned} \|u_{xt} u_{xx}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 &\leq \|u_{xt}\|_{L^2(0, T; L^\infty(0, 1))}^2 \\ &\quad \cdot \|u_{xx}\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))}^2 \end{aligned}$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} \|u_{xt} u_{xx}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 &\leq k_o^2 \|u_{xt}\|_{L^2(0, T; H^1(0, 1))}^2 \\ &\quad \|u_{xx}\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, 1))}^2 \\ &\leq k_o^2 (1 + T) \|u\|_{\mathcal{E}}^4. \end{aligned}$$

Finalement :

(115)

$$\|v_{xt}\|_{L^2(0, T; L^2(0, 1))}^2 \leq 18 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^6 (4(1 + T) + 1)$$

C. 1. 4. Conclusion :

Les estimations (112), (113), (114) et (115) donnent une estimation de la norme de v dans $\mathcal{X}$:

$$\|v\|_{\mathcal{X}}^2 \leq (k_o'')^6 T \|u\|_{\mathcal{E}}^6 + 18 k_o^4 T \|u\|_{\mathcal{E}}^6 + 18 k_o^4 \|u\|_{\mathcal{E}}^6 (5 + 4 T).$$

On pose :

$$K_2 = (k''_0)^6 T + 18 k_0^4 T + 18 k_0^4 (5 + 4 T) = (k''_0)^6 + 90 k_0^4 (1 + T).$$

L'inégalité s'écrit alors plus simplement :

(116)

$$\|v\|_{\mathfrak{X}}^2 \leq K_2 \|u\|_{\mathcal{C}}^6$$

avec

(111)

$$\|u\|_{\mathcal{C}}^2 \leq D'' \left(\|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + 4 \|\varphi\|_{H^1(0,T)}^2 \right. \\ \left. + \gamma^2 (4 k_0^2 + 1) \|w\|_{\mathfrak{X}}^2 \right).$$

On démontre ainsi que pour tout w appartenant à $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}(w)$ appartient à $\mathfrak{X}$. De plus, les estimations (116) et (111) montrent que si $\|w\|_{\mathfrak{X}}^2 \leq R^2$, alors :

$$\|\mathfrak{S}(w)\|_{\mathfrak{X}}^2 \leq P(\gamma^2 R^2),$$

où P est le polynôme à une indéterminée de degré 3, dont les coefficients sont strictement positifs et dépendent de a , c , T , k_0 , k'_0 , k''_0 et b , défini par :

$$P(X) = K_2 (D'')^3 [K_0 + (4 k_0^2 + 1) X]^3$$

où $K_0 = \|u_0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|u_1\|_{H^1(0,1)}^2 + 4 \|\varphi\|_{H^1(0,T)}^2$, et où K_2 et

D'' sont les constantes qui ont été définies précédemment (par (107) et (116)).

Pour trouver une boule $\mathfrak{B}_R$ telle que : $\mathfrak{S}(\mathfrak{B}_R) \subset \mathfrak{B}_R$, il suffit de trouver $R > 0$ tel que :

$$\underline{P(\gamma^2 R^2) \leq R^2}.$$

C'est possible si γ est suffisamment petit :

P est de degré 3 : $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$.

1er cas : $a_0 \neq 0$. On considère alors un réel ϵ quelconque tel que

$0 < \epsilon < 1$. Soit $R^2 = \frac{a_0}{\epsilon^2}$ et soit $\gamma_b > 0$ défini par :

$$\gamma_b^2 = \inf \left(1, \frac{1 - \epsilon^2}{a_1 + a_2 \frac{a_0}{\epsilon^2} + a_3 \frac{a_0^2}{\epsilon^4}} \right).$$

Si $|\gamma| \leq \gamma_b$, on a :

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \gamma^2 R^2 + a_3 \gamma^4 R^4 &= a_1 + a_2 \gamma^2 \frac{a_0}{\epsilon^2} + a_3 \gamma^4 \frac{a_0^2}{\epsilon^4} \text{ d'après le choix de } R \\ &\leq a_1 + a_2 \frac{a_0}{\epsilon^2} + a_3 \frac{a_0^2}{\epsilon^4} \text{ car } \gamma^2 \leq 1 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} P(\gamma^2 R^2) &= \frac{a_0}{R^2} + \gamma^2 \left(a_1 + a_2 \gamma^2 R^2 + a_3 \gamma^4 R^4 \right) \\ &\leq \epsilon^2 + \gamma^2 \left(a_1 + a_2 \frac{a_0}{\epsilon^2} + a_3 \frac{a_0^2}{\epsilon^4} \right) \\ &\leq \epsilon^2 + (1 - \epsilon^2) = 1 \text{ car } \gamma^2 \leq \gamma_b^2. \end{aligned}$$

2ème cas : $a_0 = 0$: alors pour $R > 0$ quelconque, $\lim_{\gamma \rightarrow 0} P(\gamma^2 R^2) = 0$,

donc il existe $\gamma_b > 0$ tel que :

$$|\gamma| \leq \gamma_b \Rightarrow P(\gamma^2 R^2) \leq R^2.$$

C.2. Le graphe de $\mathcal{S}$ est faiblement fermé dans $\mathcal{B}_R \times \mathcal{B}_R$:

Soit $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_R$, qui converge faiblement vers w dans $\mathfrak{X}$; on pose $v_n = \mathcal{S}(w_n)$ et on suppose que la suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $\mathfrak{X}$ vers v . On démontre :

$$v = \mathcal{S}(w).$$

On note u_n (resp. u) l'unique élément de $\mathcal{C}$ qui satisfait (i), (ii)^{w_n}, (iii)^{w_n} (resp. (i), (ii)^w, (iii)^w) page 73.

1) S'il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\{(u_{n_k})_x\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout en (t, x) vers u_x , alors :

$$v = \mathcal{S}(w).$$

En effet, si $\{(u_{n_k})_x\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout en (t, x) vers u_x ,

alors $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{(u_{n_k})_x^3\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout en (t, x)

vers $u_x^3 = \mathcal{S}(w)$. Comme de plus la suite $\{v_{n_k}\}$ converge faiblement

dans $\mathfrak{X}$, elle est bornée dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$. On en déduit, grâce à un lemme d'intégration de Lions [10], que la suite $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$

converge faiblement vers $\mathcal{S}(w)$ dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$. Et par hypothèse, $\{v_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers v dans $\mathfrak{X}$, donc dans

$L^2(0, T; L^2(0, 1))$. La topologie faible dans $L^2(0, T; L^2(0, 1))$ étant séparée, on conclut :

$$v = \mathcal{S}(w).$$

2) On démontre l'existence d'une telle sous-suite $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

On pose :

$$y^{(n)} = w_n - w, \quad z^{(n)} = u_n - u.$$

L'hypothèse faite sur la suite $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se traduit par :

$\{y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $\mathfrak{X}$.

Et on démontre que cette hypothèse entraîne l'existence d'une sous-

suite $\{z^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $\{z^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\{z_x^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$

converge presque partout en (t, x) vers 0.

$\{z^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie : $z^{(n)} \in \mathcal{E}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

. pour presque tout $x \in (0, 1)$: $z^{(n)}(0, x) = 0$ et $z_t^{(n)}(0, x) = 0$;

. pour presque tout $t \in (0, T)$:

$$-a z_x^{(n)}(t, 0) - c z_{xt}^{(n)}(t, 0) = b z^{(n)}(t, 0) + \gamma y^{(n)}(t, 0),$$

$$+a z_x^{(n)}(t, 1) + c z_{xt}^{(n)}(t, 1) = b z^{(n)}(t, 1) - \gamma y^{(n)}(t, 1) ;$$

. au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times]0, 1[)$ et pour presque tout $(t, x) \in (0, T) \times (0, 1)$:

$$z_{tt}^{(n)} - a z_{xx}^{(n)} - c z_{xt}^{(n)} = \gamma y_x^{(n)}.$$

De plus le corollaire du théorème 5 montre que (pour $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\varphi = 0$) l'application qui à $y \in \mathfrak{X}$ associe $z \in \mathcal{E}$ solution de (i), (ii)^y, (iii)^y est linéaire ; et (111) donne :

$$(117) \quad \|z\|_{\mathcal{E}}^2 \leq D'' \gamma^2 (4 k_0^2 + 1) \|y\|_{\mathfrak{X}}^2 ;$$

on en déduit que cette application $y \in \mathfrak{X} \longmapsto z \in \mathcal{E}$ est linéaire continue pour les topologies fortes, donc continue pour les topologies faibles ; et

comme la suite $\{y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $\mathfrak{X}$, on

conclut que la suite $\{z^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{E}$.

Par ailleurs, $\{y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathfrak{X}$, (117) montre que $\{z^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{E}$. Les suites $\{z_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{z_{xt}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc bornées respectivement dans $L^2(0, T ; H^1(0, 1))$ et $L^2(0, T ; L^2(0, 1))$. Il existe donc (lemme de convergence uniforme de Lions [10]) une sous-suite $\{z_x^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite $\{z_x^{(n)}\}$ telle que

$\{z_x^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $C([0, T] ; L^2(0, 1))$ et presque partout en (t, x) vers une fonction ζ . Et $\{z_x^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge alors nécessairement vers ζ dans $L^2(0, T ; L^2(0, 1))$, en même temps qu'elle converge faiblement vers 0 dans $L^2(0, T ; L^2(0, 1))$. La topologie faible de $L^2(0, T ; L^2(0, 1))$ étant séparée, on déduit :

$$\zeta = 0.$$

Ainsi :

$\{z_x^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout en (t, x) vers 0.

Le graphe de $\mathcal{S}$ est donc bien faiblement fermé. Ceci achève la démonstration du théorème 6.

BIBLIOGRAPHIE
=====

- [1] ADAMS R. A. :
Sobolev spaces.
Academic Press - 1975.

- [2] BREZIS H. :
Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de
contractions dans les espaces de Hilbert.
North-Holland mathematics studies - 1973.

- [3] BREZIS H. :
Problèmes unilatéraux.
Thèse d'Etat - 1972.

- [4] DAFERMOS C. M. :
The Mixed Initial-Boundary Value Problem for the Equations
of Nonlinear One-Dimensional Viscoelasticity.
Journal of differential equations 6, 71-86 (1969).

- [5] DIEUDONNÉ J. :
Eléments d'Analyse.
Gauthier-Villars - 1968.

- [6] FAN KY :
Fixed point and minimax theorems in locally convex topological
linear spaces.
Proc. Nat. Acad. Sci. USA. t. 38, (1952), 121-126.

- [7] GAGNEPAIN J. J. :
Mécanismes non linéaires dans les résonateurs à quartz :
Théorie, Expériences et Applications Métrologiques.
Thèse d'Etat - Besançon - 1972.

- [8] GREENBERG J. M. :
On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of
the Equation $\rho_o \ddot{x}_{tt} = E(\dot{x}_x) \dot{x}_{xx} + \lambda \dot{x}_{xxt}$.
Journal of Mathematical Analysis and Applications 25,
575-591 (1969).
- [9] GREENBERG J. M. - MAC CAMY R. C. - MIZEL V. J. :
On the Existence, Uniqueness, and Stability of Solutions of
the Equation $\sigma'(u_x) u_{xx} + \lambda u_x t_x = \rho_o u_{tt}$.
J. Math. Mech. 17 (1968), 707-728.
- [10] LIONS J. L. :
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites
non linéaires.
Dunod - Gauthier-Villars - 1968.
- [11] LIONS J. L. - MAGENES E. :
Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.
Dunod - 1968.
- [12] TREVES F. :
Topological vector spaces, distributions and kernels.
Academic Press - 1967.
- [13] SCHWARTZ L. :
Analyse - Topologie générale et analyse fonctionnelle.
Hermann - 1970.
- [14] YOSHIDA K. :
Functional Analysis.
Springer Verlag - 1978.

TABLE DES MATIERES
=====

	pages
INTRODUCTION.....	1
PRELIMINAIRES.....	5
A) Espaces utilisés	
B) Solution "variationnelle"	
CHAPITRE I Etude du problème (ℓ_o)	
A) Un premier théorème d'existence et d'unicité pour le problème (ℓ_o) : Théorème 1.....	8
A. 1. Estimations a priori (dans l'espace $\mathcal{E}$).....	9
A. 2. Unicité de la solution.....	17
A. 3. Existence de la solution.....	18
B) Un deuxième théorème d'existence et d'unicité pour le problème (ℓ_o) : Théorème 2.....	27
B. 1. Démonstration du théorème 2 (déf. de l'espace $\mathcal{E}_1$).....	28
B. 2. Des estimations pour la solution (dans l'espace $\mathcal{E}_1$).....	30
CHAPITRE II Etude du problème (L_g)	
A) Un théorème d'existence et d'unicité pour le problème (L_g) : Théorème 3.....	31
A. 1. Démonstration du théorème 3.....	32
A. 2. Des estimations pour la solution.....	37
B) Un deuxième théorème d'existence et d'unicité pour le problème (L_g) : Théorème 4.....	42
B. 1. Démonstration du théorème 4.....	42
B. 2. Des estimations pour la solution (déf. de l'espace E).....	46

CHAPITRE III

Etude du problème $P(\gamma, b)$

A) Un théorème d'existence et d'unicité pour le problème $P(0, b)$: Théorème 5	53
A. 1. Application du théorème de l'alternative de Fredholm.....	54
A. 2. } Propositions et lemme techniques	57
A. 3. }	65
A. 4. Démonstration du théorème 5 et estimations pour la solution.....	69
B) Un corollaire du théorème 5	73
C) Un théorème d'existence pour le problème $P(\gamma, b)$: Théorème 6.....	75
C. 1. Détermination d'une boule B_R telle que $S(B_R) \subset B_R$	77
C. 2. Le graphe de S est faiblement fermé dans $B_R \times B_R$	83

BIBLIOGRAPHIE.....	86
--------------------	----

